

Übungen zur Vorlesung Kommutative Algebra
Übungsblatt 11

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

20.06.2016

Übung 1 (4 Punkte)

Sei M ein endlich erzeugter R -Modul und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R . Zeigen Sie:

$$S^{-1}(\text{Ann}(M)) = \text{Ann}(S^{-1}M).$$

Übung 2 (4 Punkte)

Sei M ein noetherscher R -Modul und $u : M \rightarrow M$ ein Modulhomomorphismus. Zeigen Sie: falls u surjektiv ist, ist u schon ein Isomorphismus.

Übung 3 (4 Punkte)

Sei R ein Ring mit der Eigenschaft, dass jeder lokale Ring $R_{\mathfrak{p}}$ noethersch ist. Gilt dann stets, dass R noethersch ist?

Übung 4 (4 Punkte)

Sei $f : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus von endlichem Typ (das heißt S ist ein endlich erzeugter R -Modul) und sei $f^* : \text{Spec}(S) \rightarrow \text{Spec}(R)$ die von f induzierte Abbildung. Zeigen Sie: für jedes $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ ist $(f^*)^{-1}(\mathfrak{p})$ ein noetherscher topologischer Unterraum von $\text{Spec}(S)$.

Präsenzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 5

Sei M ein R -Modul. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- M ist ein flacher R -Modul
- $M_{\mathfrak{p}}$ ist ein flacher $R_{\mathfrak{p}}$ -Modul für alle Primideale \mathfrak{p}
- $M_{\mathfrak{m}}$ ist ein flacher $R_{\mathfrak{m}}$ -Modul für alle maximalen Ideale \mathfrak{m} .

Zusatzaufgaben *Die folgenden Aufgaben sind zur eigenen Übung gedacht und werden nicht abgegeben oder korrigiert.*

Übung 6

Sei R ein Ring und \mathfrak{N} das Nilradikal von R . Zeigen Sie, dass das Nilradikal von $S^{-1}R$ genau $S^{-1}\mathfrak{N}$ ist.

Übung 7

Sei \mathfrak{p} ein Primideal eines Rings R . Zeigen Sie, dass die Primideale des lokalen Rings $R_{\mathfrak{p}}$ in eins zu eins Korrespondenz zu den Primidealen von R , die in \mathfrak{p} enthalten sind, stehen.

Übung 8

Sei M ein R -Modul und N_1, N_2 Untermoduln von M . Zeigen Sie: sind M/N_1 und M/N_2 noethersch, so auch $M/(N_1 \cap N_2)$.

Dieses Blatt kann bis spätestens **12:00 Uhr am Montag, den 27.06.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben und alle Blätter, zum Beispiel mit einem Schnellhefter, zusammen zu halten.