Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Geometrie

Sommersemester 2016

Übungsblatt 4 22. Juni 2016

Aufgabe 13. (Signatur I, 2+2 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Für $r = 1, \ldots, n$ sei $A_r \in \mathrm{M}_r(\mathbb{R})$ die Matrix aus den ersten r Zeilen und Spalten von A.

(a) Zeigen Sie: Gilt $\det(A_r) \neq 0$ für alle $r = 1, \ldots, n$ und bezeichnet s die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $(1, \det(A_1), \det(A_2), \ldots, \det(A_n))$, so hat A die Signatur $(n - s, s)$.

Tipp: Schauen Sie sich den Beweis des Hauptminorenkriteriums genau an und versuchen Sie, den Beweis für diese Aufgabe zu variieren.

(b) Finden Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ mit der Signatur $(2, 1)$ und $\det(A_r) = 0$ für mindestens ein r.

Ist dies auch für eine Matrix mit der Signatur $(3, 0)$ möglich?

Aufgabe 14. (Signatur II, 2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die Signatur von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),$$

(a) indem Sie eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^t A y$ und die zugehörige Diagonalform bestimmen.

(b) indem Sie die Hauptminoren ausrechnen und die Formel aus der Aufgabe 13 anwenden.

Aufgabe 15. (Länge und Winkel, 2 Punkte)

Sei V ein euklidische Vektorraum und $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\|$. Zeigen Sie:

$$\measuredangle(v, w) = 120^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \|v + w\| = \|v\| = \|w\|.$$

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 16. (Euklidische Geometrie, 2+4 Punkte)

Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum mit dem euklidischen Translationsraum V. Für $P, Q \in \mathbb{A}$ sei $\overrightarrow{PQ} \in V$ der eindeutig bestimmter Vektor mit $\overrightarrow{PQ} + P = Q$ (Vgl. Aufgabe 3).

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{A}$, und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 1$. Zeigen Sie, dass für $P \in \mathbb{A}$ mit $\overrightarrow{P_0P} = a_1\overrightarrow{P_0P_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{P_0P_n}$ gilt:

$$\overrightarrow{QP} = a_0\overrightarrow{QP_0} + a_1\overrightarrow{QP_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{QP_n} \quad \text{für alle } \ Q \in \mathbb{A}.$$

In diesem Fall schreiben wir auch $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n$.

Zeigen Sie ferner, dass für $P_0 \neq P_1$ die Verbindungsgerade $(P_0P_1) \subseteq \mathbb{A}$ gegeben ist durch $\{aP_0 + (1-a)P_1 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(b) Sei nun $\dim \mathbb{A} = 2$ und $\triangle(ABC)$ ein Dreieck in $\mathbb{A}$. Eine Gerade heißt

- **Seitenhalbierende** (oder **Schwerelinie**), falls sie eine Ecke und die Mitte der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks verbindet,
- **Mittelsenkrechte**, falls sie eine Seite des Dreiecks in deren Mitte schneidet und senkrecht auf ihr steht,
- **Höhe**, falls sie durch eine Ecke geht und senkrecht auf der gegenüberliegenden Seite steht.

Zeigen Sie:

(i) Die Seitenhalbierenden von $\triangle(ABC)$ schneiden sich in $S := \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$.
*Bemerkung – Der Punkt S heißt der **Schwerpunkt** des Dreiecks ABC.*

(ii) Die Punkte auf der Mittelsenkrechten zur Seite AB sind genau diejenigen Punkte, deren Abstand zu A und B gleich sind. Ferner schneiden sich die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC in einem Punkt M und es gilt: $d(M, A) = d(M, B) = d(M, C)$
*Bemerkung – Der Punkt M heißt der **Umkreismittelpunkt** des Dreiecks ABC. Dies ist deswegen gerechtfertigt, da man einen Kreis mit M als Mittelpunkt durch die Ecken A, B, C zeichnen kann.*

(iii) Ist $H \in \mathbb{A}$ mit $\langle\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{BC}\rangle = \langle\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{CA}\rangle = 0$, so gilt auch $\langle\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AB}\rangle = 0$. Insbesondere schneiden sich die Höhen des Dreiecks ABC im Punkt H.
Tipp – Schreiben Sie $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$ usw.
*Bemerkung – Der Punkt H heißt der **Höhenschnittpunkt** des Dreiecks ABC.*

(iv) Es gilt $\overrightarrow{SH} = -2\overrightarrow{SM}$. Insbesondere liegen der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt auf einer Geraden.
Tipp – Überlegen Sie sich zunächst, dass $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 0$. Nutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $\overrightarrow{SH} + 2\overrightarrow{SM}$ orthogonal zu $\overrightarrow{AB}$ u.Ä. steht.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **29. Juni 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60047451/16_SS_Geometrie`
