Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter
Mach Nguyet Minh, Ph.D.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

11. Übungsblatt (erschienen am 22.06.2016)

Aufgabe 11.1 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung

$$(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + 2xy\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u + (y^2-1)\frac{\partial^2}{\partial y^2}u = x\frac{\partial}{\partial x}u + y\frac{\partial}{\partial y}u$$

im $\mathbb{R}^2$. Wo ist die Gleichung elliptisch, wo hyperbolisch und wo parabolisch?

Aufgabe 11.2 (Votieraufgabe)
Beweisen Sie die Fehlerabschätzungen für die Shortley-Weller-Approximationen in Lemma 2.7.

Aufgabe 11.3 (schriftliche Aufgabe)[2+4 Punkte]
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt und seien $c, f, g \in C(\Omega)$ mit $c \geq 0$.

(i) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung von $-\Delta u + cu = f$. Zeigen Sie, dass für $f \leq 0$ gilt:

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max\{0, \max_{x \in \partial\Omega} u(x)\}.$$

(ii) Zeigen Sie dass, die Konvergenzaussage in Folgerung 2.12 auch für die (mit den Differenzenquotienten aus Lemma 2.4 und 2.7) erstellte Diskretisierung der Gleichung

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

gilt.

Aufgabe 11.4 (Programmieraufgabe)[2+2+1+2 Punkte]
Wir betrachten für $u : (0,1)\times(0,1)\times(0,T) \to \mathbb{R} : (x,y,t) \mapsto u(x,y,t)$ die 2d-Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u \tag{1}$$

mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(0,y,t) = -\cos(y\pi)e^{-10t}, \quad u(1,y,t) = \cos(y\pi)e^{-10t}, \quad u(x,0,t) = \cos(3\pi x + 7\pi)e^{-10t},$$

$$u(x,1,t) = -\cos(3\pi x + 7\pi)e^{-10t}, \quad u(x,y,0) = \cos(3\pi x + 7\pi)\cos(y\pi).$$

Wir diskretisieren die x- und y-Koordinaten äquidistant durch $x_i = x_{i-1} + h$, $y_j = y_{j-1} + h$, für $i, j = 1, 2, \ldots, N+1$, wobei $x_0 = y_0 = 0$ und h gegeben ist. Weiterhin diskretisieren wir die t-Koordinate äquidistant zu gegebenem τ durch $t_k = t_{k-1} + \tau, k = 1, 2, \ldots, N_t + 1$ mit $t_0 = 0$.
Mit $u_{i,j}^k \approx u(x_i, y_j, t_k)$ ergeben sich also zwei mögliche Iterationsvorschriften

$$\text{(Explizites Euler-Verfahren)} \qquad u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k)$$

$$\text{(Implizites Euler-Verfahren)} \qquad u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1} - 4u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1})$$

um (beginnend mit $u_{i,j}^0 = u(x_i, y_j, 0)$) aus den Werten $u_{i,j}^k$ die Werte von $u_{i,j}^{k+1}$ zu berechnen. Aufgrund der inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen erhält man jedoch inhomogene lineare Gleichungssysteme

$$U^{k+1} = L_{Exp}U^k + B_{Exp}^k \quad \text{bzw.} \quad L_{Imp}U^{k+1} = U^k + B_{Imp}^k$$

mit $U^k = (u_{1,1}^k, u_{2,1}^k, \dots, u_{N,1}^k, \dots, u_{1,N}^k, \dots, u_{N,N}^k)^T \in \mathbb{R}^{N^2 \times 1}$ und $B_{Exp}^k, B_{Imp}^k \in \mathbb{R}^{N^2 \times 1}$.

(a) Geben Sie L_{Exp}, L_{Imp} und B_{Exp}^k, B_{Imp}^k an.

(b) Schreiben Sie eine `MATLAB` Funktion

```
function [u] = Heat2D(u_0yt,u_1yt,u_x0t,u_x1t,u_xy0,h,tau,T,method)
```

zur numerischen Lösung von (1) durch Verwendung des Explitzites Euler-Verfahrens (`method`$=0$) und des Implizites Euler-Verfahrens (`method`$=1$). Die Funktion soll in **[u]** die diskrete Approximation an $(t, x, y, u(x, y, t))$ zurückgeben via

$$\texttt{u(:,:,tk)} = \begin{pmatrix} u^k(0,0) & u^k(0,y_1) & \dots & u^k(0,y_N) & u^k(0,y_{N+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u^k(x_i,0) & u^k(x_i,y_1) & \dots & u^k(x_i,y_N) & u^k(x_i,y_{N+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u^k(x_{N+1},0) & u^k(x_{N+1},y_1) & \dots & u^k(x_{N+1},y_N) & u^k(x_{N+1},y_{N+1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}.$$

(c) Berechnen und visualisieren Sie `[u]` zum Zeitpunkt $t = T$ für $T = 0.1, h = 0.01, \tau = 10^{-5}, \tau = 10^{-3}$, `method`$=0$ sowie `method`$=1$.

(d) Plotten Sie die Fehlerterme $\|U_{Exp} - U_{exakt}\|_\infty$ und $\|U_{Imp} - U_{exakt}\|_\infty$ als Funktion von h (x-Achse) und τ (y-Achse) zum Zeitpunkt $t = T$ für $T = 0.2$, wobei die exakte Lösung gegeben ist durch

$$u(t, x, y) = \cos(3\pi x + 7\pi)\cos(y)e^{-10t}.$$

Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit Satz 2.16 in der Vorlesung.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 29.06.2016 um 11:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 29.06.2016 um 11:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"DGL11_2016_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "DGL11_2016_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 11 werden in den Übungen zwischen dem 29-30.06.2016 besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**