Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Geometrie

Sommersemester 2016

Übungsblatt 5 29. Juni 2016

Aufgabe 17. (Cholesky-Zerlegung, 4 Punkte)

Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

Zeigen Sie, dass A positiv definit ist, und bestimmen Sie eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit positiven Diagonaleinträgen, so dass $A = R^t R$.

Tipp – Wenden Sie zunächst das Gram-Schmidt-Verfahren für die Bilinearform $\langle \cdot,\cdot \rangle_A$ *auf die Standardbasis von* $\mathbb{R}^3$ *an.*

Aufgabe 18. (Methode der kleinsten Quadrate, 2+2 Punkte)

Gegeben sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -6 & 10 \\ 1 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Ferner versehen wir $\mathbb{R}^5$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{im}(A) \subseteq \mathbb{R}^5$.

(b) Bestimmen Sie das Minimum von $\|Ax - b\|$ für $x \in \mathbb{R}^4$ und finden Sie ein x, so dass dieses Minimum angenommen wird.

Aufgabe 19. (Parallelogramm, 1+3 Punkte)

Sei $\mathbb{A}$ eine affine Ebene mit dem euklidischen Translationsraum V. Ein **Parallelogramm** ist ein Viereck (A, B, C, D), bestehend aus nicht-kollinearen Punkten A, B, C, D mit $(AB) \parallel (CD)$ und $(BC) \parallel (DA)$.

(a) Zeigen Sie, dass ein Viereck (A, B, C, D) in $\mathbb{A}$ genau dann ein Parallogramm ist, wenn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 0$ und $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = 0$. In diesem Fall gilt:

$$\mathrm{vol}(P(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})) = \mathrm{vol}(P(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})) = \mathrm{vol}(P(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})) = \mathrm{vol}(P(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})).$$

Dabei ist $\overrightarrow{AB}$ der Vektor aus V mit $\overrightarrow{AB} + A = B$ u.Ä., vgl. Aufgabe 3.

Diese Zahl heißt **Flächeninhalt** des Parallelogramms (A, B, C, D) und wird im folgenden mit $|\,\mathrm{vol}(A, B, C, D)|$ bezeichnet.

—— **bitte wenden** ——

(b) Sei (A, B, C, D) ein Parallelogramm in $\mathbb{A}$. Ferner seien

$$A' := \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}B,\ B' := \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C,\ C' := \frac{3}{4}C + \frac{1}{4}D \text{ und } D' := \frac{3}{4}D + \frac{1}{4}A,$$

vgl. Definition der Affinkombination aus Aufgabe 16. Zeigen Sie, dass (A', B', C', D') ein Parallelogram ist, und berechnen Sie $|\operatorname{vol}(A', B', C', D')| \Big/ |\operatorname{vol}(A, B, C, D)|$.

Aufgabe 20. (Ähnlichkeit, 4 Punkte)

Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Unterraum mit dem euklidischen Translationsraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Eine **Ähnlichkeit** auf $\mathbb{A}$ ist eine Abbildung $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, für die es ein $c > 0$ gibt mit

$$d(\phi(P), \phi(Q)) = c \cdot d(P, Q) \quad \text{für alle} \quad P, Q \in \mathbb{A}.$$

Zeigen Sie für $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ und $P, P' \in \mathbb{A}$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) ϕ ist eine Ähnlichkeit mit $\phi(P) = P'$.

(b) Es gibt ein $c > 0$, so dass $c^{-1} f_\phi$ eine Isometrie ist. Dabei ist $f_\phi : V \to V$ definiert durch

$$f_\phi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{P'\phi(Q)} \quad \text{für alle} \quad Q \in \mathbb{A}.$$

(c) Die Abbildung f_ϕ wie in (b) ist linear, injektiv und **winkeltreu**, d.h.

$$\measuredangle(f_\phi(v), f_\phi(w)) = \measuredangle(v, w) \quad \text{für alle} \quad v, w \in V \setminus \{0\}.$$

Tipp zu (c) $\Rightarrow$ (b) : *Eine winkeltreue Abbildung erhält insbesondere die Orthogonalität.*

Erinnerung

Die Klausur zu den **Grundlagen der Algebra** findet am **Donnerstag, dem 21.07.2016, von 9:30 bis 10:30** im **Hörsaal V** statt. Die Klausur zur **Geometrie** findet im Anschluss **von 10:45 bis 11:45** statt.

Wer die Klausur(en) mitschreiben möchte, meldet sich bitte bis spätestens **Mittwoch, den 13.07.2016,** unter `http://anmeldung.math.uni-frankfurt.de` zur Klausur an.

Bitte achten Sie auf die Hinweise auf der Vorlesungshomepage.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **06. Juli 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60047451/16_SS_Geometrie`