Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

# Geometrie

Sommersemester 2016

**Präsenzaufgabenblatt 5** 29. Juni 2016

Auf diesem Blatt wird $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) stets mit dem Standardskalarprodukt versehen.

**Aufgabe P17.** (Abstände)

Skizzieren Sie im folgenden den Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ und den (affinen) Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^2$ in der kartesischen Ebene, und berechnen Sie mittels orthogonaler Projektion den Abstand $d(v, U)$ für

(a) $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

(b) $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

**Aufgabe P18.** (Normalengleichung)

Bestimmen Sie jeweils zu $v, U$ wie in Aufgabe P17 einen Vektor $z \in \mathbb{R}^2$ mit $\|z\| = 1$ und ein $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$U = U_{z,a} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, z \rangle = a \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie anschließend $\langle v, z \rangle - a$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabe P17.

**Aufgabe P19.** (Parallelotope)

Skizzieren Sie das Parallelotop $P(v_1, \ldots, v_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ und berechnen Sie dessen Inhalt für

(a) $n = 2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $n = 3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— **bitte wenden** —

**Aufgabe P20.** (Isometrien)

Untersuchen Sie jeweils, ob es eine Isometrie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den gegebenen Eigenschaften gibt, und geben Sie ggf. die Darstellungsmatrix von einer solchen $f$ bzgl. der Standardbasis an. Können Sie ggf. dafür sorgen, dass $f$ die Determinante 1 hat?

(a) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(b) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$