Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Geometrie

Sommersemester 2016

Präsenzaufgabenblatt 6 06. Juli 2016

Aufgabe P21. (adjungierte Endomorphismen)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Vektorraum über einem Körper K mit symmetrischer, perfekter Bilinearform. Ferner sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $P \in K[X]$. Zeigen Sie:

(a) $P(f^*) = P(f)^*$

(b) Ist f normal, so ist es auch $P(f)$.

Aufgabe P22. (zum Spektralsatz)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$

Zeigen Sie, dass $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $v \mapsto Av$ einen selbstadjungierten Endomorphismus auf $\mathbb{C}^2$ bzgl. des Standardskalarprodukts definiert, dass dieser aber nicht diagonalisierbar ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum Spektralsatz für normale Operatoren?

Aufgabe P23. (selbstadjungierte Endomorphismen)

Gegeben sei

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Linksmultiplikation mit B einen selbstadjungierten Endomorphismus auf dem euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^2$ definiert, und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von B.

(b) Finden Sie eine orthogonale Matrix $S \in O(2)$, so dass $S^t BS$ diagonal ist.

Aufgabe P24. (Isometrie-Normalform)

Welches der folgenden Polynome kann das charakteristische Polynom einer Isometrie sein? Geben sie ggf. die zugehörige Isometrie-Normalform an:

$$X^2 - X + 1,\ X^2 - 3X + 1,\ X^3 - 1,\ X^4 + 2X + 1$$

Dieses Blatt wird weder abgegeben noch korrigiert, sondern in den Tutorien besprochen. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60047451/16_SS_Geometrie`