Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Geometrie

Sommersemester 2016

Übungsblatt 6 06. Juli 2016

Aufgabe 21. (Variante des Spektralsatzes, 4 Punkte)

Sei $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit symmetrischer anisotroper Bilinearform. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ äquivalent sind:

(a) f ist selbstadjungiert und χ_f zerfällt vollständig in Linearfaktoren.

(b) Es gibt $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ paarweise verschieden sowie eine Zerlegung in orthogonale Unterräume $V = W_1 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp W_k$ derart, dass

$$f = \lambda_1 p_{W_1} + \cdots + \lambda_k p_{W_k}.$$

Dabei bezeichnet $p_{W_i} \in \mathrm{End}_K(V)$ die orthogonale Projektion auf W_i für jedes $i = 1, \dots, k$.

Aufgabe 22. (3 Punkte)

Sei K ein Körper, in dem jede Summe von Quadraten wieder ein Quadrat ist, und $n \in \mathbb{N}$, so dass das Standardskalarprodukt auf K^n anisotrop ist. Ferner seien $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ symmetrisch und χ_A zerfalle über K in Linearfaktoren. Zeigen Sie:

$$\chi_A = \chi_B \iff \exists S \in O_n(K) : B = S^t A S.$$

Aufgabe 23. (Beispiele, 2+2 Punkte)

Auf dem euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^3$ seien zwei Endomorphismen $f = L_A$ bzw. $g = L_B$ gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine Isometrie ist, und bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in O(3)$, so dass $S^t A S$ in der Isometrie-Normalform ist.

Tipp – Um eine Orthonormalbasis zu bestimmen, bezüglich derer die Isometrie-Normalform angenommen wird, könnte die Aufgabe 24(d) *hilfreich sein.*

(b) Zeigen Sie, dass g selbstadjungiert ist, und bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in O(3)$, so dass $T^t B T$ diagonal ist.

— **bitte wenden** —

Aufgabe 24. (Komplexifizierung II, 1+1,5+1+1,5 Punkte)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Wie in der Vorlesung sei $V_\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} V = V \oplus \mathrm{i}V$ die Komplexifizierung von V und $f_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$ gegeben durch $f(u + \mathrm{i}v) = f(u) + \mathrm{i}f(v)$ für $u, v \in V$. Zeigen Sie:

(a) Ist $u + \mathrm{i}v \in V_\mathbb{C}$ ein Eigenvektor von $f_\mathbb{C}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $u - \mathrm{i}v$ ein Eigenvektor von $f_\mathbb{C}$ zum Eigenwert $\bar{\lambda}$.

(b) Die Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathbb{C} : \begin{cases} V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C}, \\ (v_1 + \mathrm{i}v_2, w_1 + \mathrm{i}w_2) & \longmapsto (\langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_2\rangle) + \mathrm{i}(\langle v_2, w_1\rangle - \langle v_1, w_2\rangle), \end{cases}$$

ist eine **hermitesche Form** auf $\mathbb{C}$, d.h. für alle $x, x', y, y' \in V_\mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $\langle x + x', y\rangle_\mathbb{C} = \langle x, y\rangle_\mathbb{C} + \langle x', y\rangle_\mathbb{C}$ und $\langle \lambda x, y\rangle_\mathbb{C} = \lambda\langle x, y\rangle_\mathbb{C}$.

(ii) $\langle x, y + y'\rangle_\mathbb{C} = \langle x, y\rangle_\mathbb{C} + \langle x, y'\rangle_\mathbb{C}$ und $\langle x, \lambda y\rangle_\mathbb{C} = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle_\mathbb{C}$.

(iii) $\langle y, x\rangle_\mathbb{C} = \overline{\langle x, y\rangle_\mathbb{C}}$.

(c) Ist f eine Isometrie auf V, so ist $f_\mathbb{C}$ eine Isometrie auf $V_\mathbb{C}$ im Sinne, dass

$$\langle f_\mathbb{C}(x), f_\mathbb{C}(y)\rangle_\mathbb{C} = \langle x, y\rangle_\mathbb{C} \quad \text{für alle } x, y \in V_\mathbb{C}.$$

Außerdem hat jeder Eigenwert von $f_\mathbb{C}$ den Betrag 1.

(d) Ist f eine Isometrie auf V und $u + \mathrm{i}v \in V_\mathbb{C}$ ein Eigenvektor von $f_\mathbb{C}$ zum *nicht-reellen* Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt $\|u\| = \|v\|$ und $\langle u, v\rangle = 0$.

Bestimmen Sie anschließend die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}(f|_U)$, wobei $U \subseteq V$ den von u, v erzeugten Unterraum und $\mathscr{B}$ die Basis (u, v) von U bezeichnet.

Tipp – Zeigen Sie zunächst, dass in diesem Fall $\langle u + \mathrm{i}v, u - \mathrm{i}v\rangle_\mathbb{C} = 0$ *gilt.*

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **13. Juli 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/60047451/16_SS_Geometrie`