Numerik von Differentialgleichungen
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dipl.-Math. Dominik Garmatter
Mach Nguyet Minh, Ph.D.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

12. Übungsblatt (erschienen am 29.06.2016)

Aufgabe 12.1 (Votieraufgabe)
Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Weiterhin seien die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B gegeben durch

$$Av_j = \lambda_j v_j,\ j = 1,\dots,n \qquad Bw_j = \mu_j w_j,\ j = 1,\dots,m.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A \otimes B$, wobei das Kronecker Produkt $\otimes$ in Bemerkung 2.6 definiert wurde.

Aufgabe 12.2 (Votieraufgabe)
Seien $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A_h \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$ die Matrizen aus Bemerkung 2.6. Weiterhin bezeichne $h = \frac{1}{n+1}$.

(a) Verifizieren Sie, dass für $k = 1,\dots,n$ durch $\lambda_k = 2(\cos(\pi kh) - 1)$ und $v_k = (v_{k,j})_{j=1}^n$ mit $v_{k,j} = \sin(\pi kjh)$ die Eigenwerte und Eigenvektoren von $-T$ gegeben sind.

(b) Bestimmen Sie damit die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $-A_h$.

(c) Wir definieren für ein $v \in \mathbb{R}^n$ die *gewichtete Euklidnorm* $\|v\|_{RMS} := \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^n (v_i)^2\right)^{1/2}$. Zeigen Sie, dass die dadurch induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_{RMS}$ gerade die Spektralnorm $\|\cdot\|_2$ ist.

(d) Sei $\tau > 0$. Beweisen Sie:

(i) $\|(I + \tau A_h)^{-1}\|_{RMS} \leq 1$, unabhängig von τ und h.

(ii) $\|I - \tau A_h\|_{RMS} \leq 1$, für $\frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{4}$.

Aufgabe 12.3 (Programmieraufgabe zum Votieren)
In dieser Aufgabe soll auf einfache aber äußerst flexible Art und Weise die Lösung des Poisson-Problems mit inhomogenen Dirichlet-Daten

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u\,|_{\partial\Omega} = g$$

für allgemeine offene Mengen $\Omega \subset \tilde{\Omega} := (-2,2)^2 \subset \mathbb{R}^2$ angenähert werden.

Gehen Sie wie folgt vor: gehen Sie davon aus, dass sowohl f als auch g (!!) als Funktionen auf $\tilde{\Omega}$ gegeben sind. Ω sei durch eine auf $\tilde{\Omega}$ definierte und stetige *Level-Set-Funktion*

$$p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad p(x,y) = \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in \Omega \\ > 0 & \text{für } x \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

beschrieben.

Schreiben Sie eine `MATLAB` Funktion

```
u = level_set(f,g,p,h)
```

welche zu gegebenen Funktionen f, g, p und zu gegebener Schrittweite h die Gleichung $-\Delta u = f$ auf $\tilde{\Omega}$ diskretisiert und dabei aber diejenigen Gleichungen, die zu Gitterpunkten $x \notin \Omega$ gehören, durch Gleichungen ersetzt, welche an diesen Punkten $u(x) = g(x)$ (beachte: $g(x)$ war eine Funktion) erzwingen.

Testen Sie ihre Funktion mit $h = \frac{1}{20}$, $g(x, y) = -x - y$, sowie

$$f(x,y) = \begin{cases} 100 & \text{falls } |x - 0.5| < 0.05 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \quad p(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3.$$

Veranschaulichen Sie ihr Ergebnis.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 12 werden in den Übungen zwischen dem 06-07.06.2016 besprochen.