Sonderaufgaben zu der Vorlesung

"Diskrete und Numerische Mathematik für Informatiker"

Frankfurt, den 12.7.2016

Bitte beachten Sie: Die Anmeldefrist für die Klausur am 2.8.2016 endet am 19.7.2016.

Die vorliegenden Aufgaben, von denen sich alle – bis auf die beiden letzten – auf die ersten 9 Kapitel der Vorlesung beziehen, dienen zur Vorbereitung auf die Klausur. – Das bedeutet aber nicht, dass anderer Stoff der ersten 9 Kapitel für die Klausur nicht relevant sein wird.

Bei jeder der 10 folgenden Aufgaben können zwei Sonderpunkte erlangt werden.

A) Die Mannschaften A, B, C, D tragen ein Turnier nach dem System "Jeder gegen Jeden" aus. Für einen Sieg gibt es 3 Punkte, 1 Punkt für ein Unentschieden und 0 Punkte bei einer Niederlage. A erringt 7 Punkte, B erhält 5 Punkte, C erzielt 3 Punkte, und D erhält einen Punkt. Entscheiden Sie – mit Begründung, wer gegen wen gewonnen hat und welche Spiele Unentschieden ausgegangen sind.

B) Es bezeichne $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Eulersche Funktion.

i) Berechnen Sie:

$$\varphi(1024),\ \varphi(3125),\ \varphi(703),\ \varphi(899).$$

ii) Bestimmen Sie – mit Begründung – die kleinste natürliche Zahl m mit $\varphi(m) = 8$.

iii) Geben Sie – mit Begründung – explizit ein $n \in \mathbb{N}$ an mit der Eigenschaft $\varphi(n) < \frac{n}{3}$.

C) Über dem Körper $\mathbb{Z}/5 \cdot \mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ betrachten wir den Code C, der die Generatormatrix

$$A := \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \end{pmatrix}$$

hat.

i) Geben Sie – mit Begründung – eine Kontrollmatrix für C an.

ii) Berechnen Sie die Distanz $d(C)$. Wieviele Fehler korrigiert der Code C ?

iii) Entscheiden Sie – mit Begründung – ob C ein Hamming-Code ist.

D) Es sei K ein endlicher Körper, es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n-1$, und es sei $A \in Mat_{m \times n}(K)$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(I) A ist die Kontrollmatrix irgendeines Codes C mit $\{0\} \subsetneq C \subsetneq K^n$.

(II) Die Zeilen von A sind linear unabhängig; das heißt: A hat den Rang m.

E) Entscheiden Sie – mit Begründung – ob auf einem Rechner mit Dezimaldarstellung, Gleitpunktarithmetik und Mantissenlänge $t = 4$ für alle reellen Zahlen a, b, c, d die Beziehung

$$(a \oplus b) \oplus (c \oplus d) = ((a \oplus b) \oplus c) \oplus d$$

gilt oder nicht.

F) Gegeben sei die Funktion $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \frac{1}{x^2+1}.$$

Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte kubische Spline-Funktion $s : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ zur Knotenmenge $T = \{-2, 0, 2\}$, die die Bedingungen

$$s(t) = f(t) \text{ für } t \in T,\ s'(-2) = f'(-2),\ s'(2) = f'(2)$$

erfüllt.

G) Es bezeichne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion. Bekanntlich hat f keine Nullstelle. Führen Sie trotzdem das Newton-Verfahren mit einem festen – vorgegebenen, aber nicht bekannten – Startwert x_0 durch. Was beobachten Sie?

H) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit einer invertierbaren Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$ sowie ein gestörtes lineares Gleichungssystem $A \cdot \tilde{x} = b + \Delta b$. Beweisen Sie: Ist $||\ ||$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$, deren zugehörige Matrix-Norm ebenfalls mit $||\ ||$ bezeichnet wird, so gilt:

$$||x - \tilde{x}|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta b||.$$

Die folgenden zwei Aufgaben sind nicht mehr relevant für die Klausur. – Diese Aufgaben dienen aber dazu, dass überhaupt noch numerische Berechnungen von Integralen ausgeführt werden.

I) Es sei

$$I := \int_0^1 \frac{cos(\pi \cdot x)}{\sqrt{1-x}}\, dx.$$

i) Führen Sie die Berechnung dieses Integrals mittels der Variablensubstitution $1 - x = t^2$ zurück auf die Berechnung des Integrals einer auf dem gesamten Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktion f.

ii) Berechnen Sie mittels der zusammengesetzten Trapezregel Näherungswerte für $I(f)$ – für die Werte $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

J) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$$

sowohl exakt – mittels der bekannten analytischen Methoden – als auch mit der zusammengesetzten Simpson-Regel für die Werte $k = 2^j$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Worauf führen Sie die “verhältnismäßig” schlechten Werte bei Anwendung der zusammengesetzten Simpson-Regel zurück?