§ 11 Geometrische Aspekte der Graphentheorie

Definition 11.1:
Ein Graph $G=(V,E)$ besteht aus einer endlichen nichtleeren Menge V von Vertizes (oder Knoten) und einer Teilmenge E von $\mathcal{P}_2(V) = \binom{V}{2}$; die Elemente von E heißen die Kanten von G.

Definition 11.2:
Zwei Graphen $G=(V,E)$ und $G'=(V',E')$ heißen isomorph, falls es eine Bijektion $f: V \to V'$ gibt, so dass für $v,w \in V$ die folgende Äquivalenz erfüllt ist:

$$\{v,w\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(w)\} \in E'. \tag{11.2}$$

In dem Fall heißt f ein Isomorphismus von G auf G'.

Bemerkung 11.3:
Graphen $G=(V,E)$ werden so in die Ebene $\mathbb{R}^2$ gezeichnet, dass die Vertizes durch Punkte dargestellt werden. Für $v,w \in V$ mit $\{v,w\} \in E$ werden die Punkte v und w durch eine Linie - und zwar möglichst durch eine Strecke - miteinander verbunden; diese wird dann ebenfalls Kante genannt.

Beispiel:

Die folgenden Graphen sind isomorph:

Ein Isomorphismus ist gegeben durch

$$f(v_i) := w_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq 4.$$

Definition 11.4:

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.

i) Ein Weg $W = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ in G ist eine endliche Folge von Vertizes mit

$$\{v_{i-1}, v_i\} \in E \quad \text{für alle } i \text{ mit } 1 \leq i \leq n.$$

v_0 heißt Anfangspunkt von W, und v_n heißt Endpunkt von W.

ii) Der Graph G heißt zusammenhängend, wenn gilt:

Zu je zwei verschiedenen Vertizes $v, w \in V$ gibt es einen Weg in G, der v als Anfangspunkt und w als Endpunkt hat.

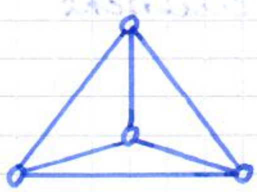
iii) Ein Vertex $v \in V$ heißt isoliert, falls es gar keine Kante in E gibt, die v enthält.

iv) Zwei Vertizes $v, w \in V$ heißen benachbart, falls $\{v, w\} \in E$ ist. v und w heißen dann auch Nachbarn in G.

Definition 11.5:

Ein Graph $G=(V,E)$ heißt ein vollständiger Graph, wenn $E=\binom{V}{2}$ ist.
Ist dabei $n:=|V|$, so schreiben wir auch: $G=K_n$.

Darstellung von K_4



Definition 11.6:

Ein Graph $G=(V,E)$ heißt ein bipartiter Graph, wenn Teilmengen $A,B\subseteq V$ mit $A\cap B=\emptyset$ und $A\cup B=V$ existieren, so dass gilt:

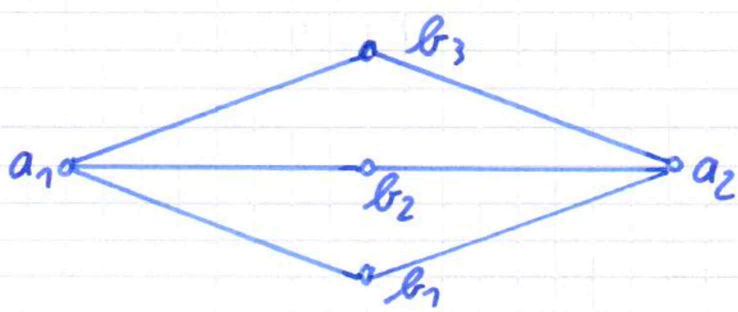
(11.6a) $\quad E\subseteq\{\{v,w\}\mid v\in A,\, w\in B\}$.

Gilt sogar

(11.6b) $\quad E=\{\{v,w\}\mid v\in A,\, w\in B\}$,

so heißt G ein vollständig bipartiter Graph.
Ist dabei $|A|=n$ und $|B|=m$, so schreiben wir auch: $\quad G=K_{n,m}$.

Darstellung von $K_{2,3}$



Hier ist $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$.

Definition 11.7:

Ein Graph $G=(V,E)$ heißt **planar** (oder plättbar), wenn er so in die Ebene gezeichnet werden kann, dass sich verschiedene Linien nur in den Knoten schneiden.

Satz 11.8, Die Eulersche Formel:

Es sei $G=(V,E)$ ein planarer Graph, der gemäß Definition 11.7 in die Ebene gezeichnet ist. Dann unterteilt der Graph die Ebene in f Flächenstücke – für ein $f\in\mathbb{N}$, von denen eines unbeschränkt und die übrigen beschränkt sind. Ferner sei G zusammenhängend. Setzen wir noch $v:=|V|$, $e:=|E|$, so gilt:

(11.8) $$v-e+f=2.$$

Bemerkungen 11.9:

Gegeben sei ein Graph $G=(V,E)$. Wir betrachten folgende drei Möglichkeiten, eine Unterstruktur von G zu bilden:

i) Es sei $e_0=\{v_0,w_0\}\in E$. Entferne die Kante e_0 von E, betrachte also den neuen Graphen
$$G_1:=(V,E\setminus\{e_0\}).$$

ii) Es sei $|V|\geq 2$, und v_0 sei ein isolierter Vertex in G. Entferne diesen, betrachte also den neuen Graphen
$$G_2:=(V\setminus\{v_0\},E).$$

iii) Es seien v_0, w_0 Nachbarn in G, die keinen weiteren gemeinsamen Nachbarn in $V \setminus \{v_0, w_0\}$ haben; setze $e_0 := \{v_0, w_0\}$.

Ziehe v_0, w_0 zu einem <u>neuen</u> Vertex u_0 – mit $u_0 \notin V$ – zusammen, setze also

$$V' := (V \setminus \{v_0, w_0\}) \cup \{u_0\}.$$

Betrachte ferner die – injektive – Abbildung

$\pi: \; E \setminus \{e_0\} \to \binom{V'}{2}$, definiert durch

$\pi(\{u, v\}) := \{u, v\}$, falls $\{u, v\} \cap \{v_0, w_0\} = \emptyset$,

$\pi(\{u, v_0\}) := \{u, u_0\}$, falls $\{u, v_0\} \in E \setminus \{e_0\}$,

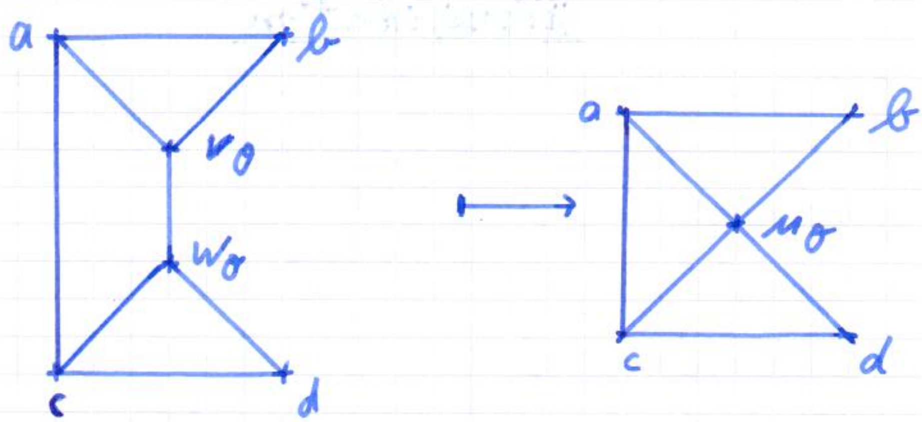
$\pi(\{u, w_0\}) := \{u, u_0\}$, falls $\{u, w_0\} \in E \setminus \{e_0\}$.

Betrachte nun den neuen Graphen

$$G_3 := (V', \pi(E \setminus \{e_0\})).$$

Die Konstruktionen i) und ii) heißen <u>elementare Einschränkungen</u> von G; eine Konstruktion wie in iii) heißt eine <u>elementare Kontraktion</u> von G.

<u>Skizze zu iii)</u>



Definition 11.10:

Ein Minor eines gegebenen Graphen G ist jeder Graph, der, ausgehend von G, durch eine Folge von elementaren Einschränkungen und elementaren Kontraktionen entsteht.

Theorem 11.11, der Satz von Kuratowski:

Ein endlicher Graph ist genau dann planar, wenn weder der vollständige Graph K_5, noch der vollständig bipartite Graph $K_{3,3}$ ein Minor von G ist.

Bemerkung 11.12:

Ein Platonischer Körper P ist eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, dessen Oberfläche - für ein $n \in \mathbb{N}$ - aus lauter regelmäßigen n-Ecken besteht und in dem von jeder Ecke gleich viele - etwa k - Kanten ausgehen.
In Platonischen Körpern gilt auch die Eulersche Formel; hier ist nun f die Anzahl der n-Ecke.

Klassifikation

Name	n	k	v	e	f
Tetraeder	3	3	4	6	4
Würfel	4	3	8	12	6
Oktaeder	3	4	6	12	8
Ikosaeder	3	5	12	30	20
Dodekaeder	5	3	20	30	12