Lösungen der Sonderaufgaben
zu der Vorlesung
„Diskrete und Numerische Mathematik für Informatiker"

A) Aus der angegebenen Punkteverteilung folgt sofort:

(I) A hat 2 mal gewonnen und 1 mal unentschieden gespielt.

(II) B hat 1 mal gewonnen und 2 mal unentschieden gespielt.

(III) D hat 1 mal unentschieden gespielt und 2 mal verloren.

Dagegen gibt es für C von vornherein zwei mögliche Konstellationen:
Entweder hat C 1 mal gewonnen und 2 mal verloren – oder C hat in jedem Spiel unentschieden gespielt.
Weil aber die Zahl der Siege gleich der Zahl der Niederlagen ist, folgt mit (I), (II), (III):

(IV) C hat 1 mal gewonnen und 2 mal verloren.

Zusammen mit (I) – (IV) folgt nun sukzessiv:

(V) C hat gegen D gewonnen und sowohl gegen A und B verloren.

(VI) B hat gegen A und D unentschieden gespielt.

(VII) A hat gegen C und D gewonnen.

(VIII) D hat gegen B unentschieden gespielt und sowohl gegen A und C verloren.

Insgesamt erhalten wir folgende Tabelle -mit den üblichen Anfangsbuchstaben g, u, v für die Spielausgänge:

	A	B	C	D
A	–	u	g	g
B	u	–	g	u
C	v	v	–	g
D	v	u	v	–

B i) Wir erhalten:

$$f(1024) = f(2^{10}) = 2^{10} - 2^9 = 2^9 = 512,$$
$$f(3125) = f(5^5) = 5^5 - 5^4 = 5^4 \cdot (5-1) = 4 \cdot 625 = 2500,$$
$$f(703) = f(19 \cdot 37) = f(19) \cdot f(37) = 18 \cdot 36 = 648,$$
$$f(899) = f(30^2 - 1^2) = f(29 \cdot 31) = f(29) \cdot f(31) = 28 \cdot 30 = 840.$$

ii) Ist $m \in \mathbb{N}$ mit $f(m) = 8$, so ist notwendig $m \geq 9$.
Es gilt nun:

$$f(9) = 3^2 - 3 = 6, \quad f(10) = f(2) \cdot f(5) = 4, \quad f(11) = 10,$$
$$f(12) = 4, \quad f(13) = 12, \quad f(14) = f(7) = 6,$$
$$f(15) = f(3) \cdot f(5) = 2 \cdot 4 = 8.$$

$m = 15$ ist also die kleinste natürliche Zahl mit $f(m) = 8$.

iii) Es gilt:

$$f(30) = |\{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}| = 8 < \frac{30}{3}.$$

Wir können also $n = 30$ setzen.

c i) Eine Kontrollmatrix M wie gewünscht muss 2 linear unabhängige Zeilenvektoren aufweisen, die beide senkrecht auf den beiden Zeilenvektoren von A stehen.

Jeder Vektor der Gestalt $(\overline{x}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{2})$ steht senkrecht auf $(\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{1})$.

Ferner gilt:

$$\langle (\overline{x}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}) \rangle = \overline{x} + \overline{2} + \overline{1} + \overline{3} = \overline{x} + \overline{1}.$$

Mit $\overline{x} = \overline{4}$ folgt also:

Der Vektor $(\overline{4}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{2})$ steht senkrecht auf beiden Zeilen von A.

Ferner steht auch jeder Vektor der Gestalt $(\overline{y}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{2})$ senkrecht auf $(\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{1})$.

Weiter gilt:

$$\langle (\overline{y}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}) \rangle = \overline{y} + \overline{4} + \overline{3} + \overline{3} = \overline{y}.$$

Mit $\overline{y} = \overline{0}$ folgt also:

Der Vektor $(\overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{2})$ steht ebenfalls senkrecht auf beiden Zeilen von A.

Wir setzen also:

$$M := \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix}.$$

ii) Je zwei verschiedene Spalten von M sind linear unabhängig; folglich ist $d(C) = 3$. Daher korrigiert C bis zu einem Fehler.

iii) Für $q = 5$, $n = 4$ und $m = 2$ folgt:

$$\frac{q^m - 1}{q - 1} = \frac{24}{4} = 6 \neq n.$$

Folglich ist C definitionsgemäß <u>kein</u> Hamming-Code.

D) (I) $\Rightarrow$ (II):

Nach Definition sind die Zeilen einer Kontrollmatrix stets linear unabhängig.

(II) $\Rightarrow$ (I):

Sei C' der Unterraum von K^n, der von den Zeilen von A erzeugt wird. Dann ist A Kontrollmatrix für $C := (C')^\perp$; dabei ist auch $C^\perp = C'$.

E) Die gefragte Beziehung gilt im allgemeinen nicht.

<u>Gegenbeispiel:</u>

$a = 0{,}012$; $b = 0{,}00149$; $c = 33{,}68$; $d = -33{,}67$.

Wir erhalten

$$(a \oplus b) \oplus (c \oplus d) = 0{,}01349 \oplus 0{,}01 = 0{,}02349,$$

aber

$$((a \oplus b) \oplus c) \oplus d = (0{,}01349 \oplus 33{,}68) \oplus (-33{,}67)$$
$$= 33{,}69 \oplus (-33{,}67) = 0{,}02.$$

f) Wir machen den Ansatz

$$s(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d + \alpha \cdot x_+^3 \quad \text{für } x \in [-2, 2] .$$

Dann ist

$$s'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c + 3\alpha \cdot x_+^2 .$$

Weiter gilt für $x \in [-2, 2]$:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} .$$

Die geforderten Bedingungen liefern nun folgendes lineare Gleichungssystem mit 5 Gleichungen und 5 Variablen:

(I) $\quad -8a + 4b - 2c + d = \frac{1}{5}$,

(II) $\quad d = 1$,

(III) $\quad 8a + 4b + 2c + d + 8\alpha = \frac{1}{5}$,

(IV) $\quad 12a - 4b + c = \frac{4}{25}$,

(V) $\quad 12a + 4b + c + 12\alpha = -\frac{4}{25}$.

Addition von (I) und (III) liefert – unter Ausnutzung von (II):

(VI) $\quad 8b + 2 + 8\alpha = \frac{2}{5}$.

Subtraktion von (V) und (IV) liefert:

(VII) $\quad 8b + 12\alpha = -\frac{8}{25}$.

Subtraktion von (VII) und (VI) liefert:

$$4\alpha - 2 = -\frac{8}{25} - \frac{10}{25} = -\frac{18}{25}$$

$$\Rightarrow 4\alpha = \frac{32}{25}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8}{25}.$$

Damit liefert (VI):

$$b = -\alpha - \frac{1}{8}\cdot\left(2 - \frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{25} - \frac{1}{5} = -\frac{13}{25}.$$

Einsetzen der berechneten Werte in (I) und (IV) liefert:

$$\left.\begin{array}{ll} -8a - \frac{52}{25} - 2c + 1 = \frac{1}{5} & \\ \wedge\ \ 12a + \frac{52}{25} + c = \frac{4}{25} & \mid\cdot 2 \end{array}\right] +$$

$$\Rightarrow 16a + \frac{52}{25} + 1 = \frac{13}{25}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{16\cdot 25}\cdot(13 - 52 - 25) = -\frac{64}{16\cdot 25} = -\frac{4}{25}.$$

Damit folgt schließlich:

$$c = \frac{4}{25} - \frac{52}{25} + 12\cdot\frac{4}{25} = 0.$$

Wir erhalten also:

$$s(x) = -\frac{4}{25}\cdot x^3 - \frac{13}{25}\cdot x^2 + 1 + \frac{8}{25}\cdot x_+^3$$

$$= -0{,}16\cdot x^3 - 0{,}52\cdot x^2 + 1 + 0{,}32\cdot x_+^3$$

$$= \begin{cases} -0{,}16\cdot x^3 - 0{,}52\cdot x^2 + 1 & \text{für } -2 \le x \le 0 \\ 0{,}16\cdot x^3 - 0{,}52\cdot x^2 + 1 & \text{für } 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

<u>Anmerkung</u>: s ist eine gerade Funktion.

G) Zum Newton-Verfahren gehört die Iterationsfunktion $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x}{e^x} = x - 1.$$

Es ist also $\Phi(x_0) = x_0 - 1$.

Das bedeutet:

Das Newton-Verfahren liefert die Werte

$x_0, x_0 - 1, x_0 - 2, \ldots$

Allgemein ist also $x_n = x_0 - n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Die Exponentialfunktion hat zwar keine Nullstelle; markant ist aber:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

H) Die in der Aufgabenstellung gegebenen Gleichungen liefern - nach Multiplikation mit A^{-1} von links:

$$x = A^{-1} \cdot b \quad \wedge \quad \tilde{x} = A^{-1} \cdot (b + \Delta b).$$

Subtraktion liefert:

$$\tilde{x} - x = A^{-1} \cdot \Delta b$$

$$\Rightarrow \|x - \tilde{x}\| = \|\tilde{x} - x\| = \|A^{-1} \cdot \Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$

I i) Aus $1 - x = t^2$ folgt $x = 1 - t^2$ und damit $\frac{dx}{dt} = -2t$.

Somit erhalten wir:

$$I = \int_0^1 \frac{2t}{t} \cdot \cos(\pi \cdot (1 - t^2))\, dt$$

$$= -2 \cdot \int_0^1 \cos(\pi \cdot t^2)\, dt.$$

ii) Gemäß i) definieren wir $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) := -2 \cdot \cos(\pi \cdot t^2) .$$

Für $k \in \mathbb{N}$ liefert dann die zusammengesetzte Trapezregel den Näherungswert

$$T_k(f) = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{f(0)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} f\left(\frac{i}{k}\right) + \frac{f(1)}{2} \right)$$

$$= -\frac{2}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \cos\left(\pi \cdot \left(\frac{i}{k}\right)^2\right) .$$

Man beachte dabei: $f(0) = -2 = -f(1)$.

Er ergibt sich nun folgende

<u>Tabelle</u>

k	$T_k(f)$
1	0
2	-0,707106781
3	-0,742227199
4	-0,746400870
5	-0,747368552
6	-0,747688614

7) Es ist

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot(1-0) = \frac{2}{3}.$$

Setze $f(x) := \sqrt{x}$ für $x \in [0,1]$.

Für $k = 2^j$, $j \in \mathbb{N}$, liefert die zusammengesetzte Simpson-Regel den Näherungswert

$$\begin{aligned} S_k(f) = \frac{1}{3k}\cdot\Big(0 &+ 4\cdot\sqrt{\tfrac{1}{k}} + 2\cdot\sqrt{\tfrac{2}{k}} \\ &+ 4\cdot\sqrt{\tfrac{3}{k}} + 2\cdot\sqrt{\tfrac{4}{k}} \\ &\dots \\ &+ 4\cdot\sqrt{\tfrac{k-1}{k}} + 1\Big). \end{aligned}$$

Tabelle

k	$S_k(f)$
2	0,638071188
4	0,656526265
8	0,663079280
16	0,665398189

Selbst für $k = 16$ wird der exakte Wert $0,\overline{6}$ immer noch relativ schlecht approximiert. – Das hängt damit zusammen, dass die Voraussetzung von Satz 10.12 nicht erfüllt ist: f ist an der Stelle $a = 0$ garnicht differenzierbar.