Matteo Costantini / Jürgen Wolfart

Hausaufgaben und Infos zur Elementarmathematik I

Wintersemester 2016/17

1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \qquad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

2. Zeigen Sie:

a) $2^n \leq n! \leq n^n$ für alle $n \geq 4$.

b) $n^3 - n$ ist für jedes n durch 3 teilbar.

3. Sei (a_n) die Fibonacci-Folge: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ für $k \geq 2$, also die Zahlenfolge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} + (-1)^{n-1}$$

für alle $n \geq 2$ gilt.

4. In der Ebene seien n Geraden in *allgemeiner Lage* gegeben, d.h. keine zwei der n Geraden seien parallel, und jeder Punkt der Ebene liegt höchstens auf zwei der n Geraden (es gibt also also keine Mehrfachschnittpunkte). Beweisen Sie, dass die Ebene durch die n Geraden in $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Gebiete zerschnitten wird.

Die Lösungen der Hausaufgaben **1 bis 4** sind vor der Vorlesung am 24.10. abzugeben. Nicht vergessen, Ihren Namen und den Namen Ihres Tutors/Ihrer Tutorin darauf zu notieren! Die Übungen fangen bereits in der ersten Semesterwoche an.

Zusammenarbeit mit anderen ist sehr zu empfehlen, aber Sie müssen lernen, wie man Mathematik korrekt formuliert, und das kann man nur alleine; also keine gemeinsame Lösung abgeben!

5. Wir ergänzen die Definition der Binomialkoeffizienten durch $\binom{n}{k} := 0$, wenn $k > n$. Beweisen Sie:

$$a) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$$b) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{c} = \binom{n+1}{c+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$$c) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = a_{n+1} \text{ wobei } a_n \text{ die } n\text{-te Fibonacci Zahl ist.}$$

6. Welche der nachfolgenden Relationen ist eine Äquivalenzrelation? Im Fall von Äquivalenzrelationen beschreiben Sie die Äquivalenzklassen.

1. Sei X die Menge alle Schauspieler. Wir sagen $a \sim b$ für $a, b \in X$, genau dann, wenn a und b in einem gemeinsamen Film mitgespielt haben.
2. Auf $X = \mathbb{Z}$ gilt die Relation $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y$ teilbar durch 7 ist.
3. Sei X ein Menge und $Y \subset X$ ein Teilmenge. Wir sagen $a \sim b$ für $a, b \in X$, genau dann, wenn $a = b$ oder $a \in Y$ und $b \in Y$ sind.

7. Welche der nachfolgenden Abbildungen ist injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$
2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto 3n + 1.$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x.$

8. Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ ein Abbildung. Beweisen Sie, dass die Relation „ $a \sim b$ für $a, b \in X$, genau dann wenn $f(a) = f(b)$ " eine Äquivalenzrelation ist. Außerdem beweisen Sie, dass die Abbildung

$$X/\sim \to Y, \quad [x] \to f(x)$$

wohldefiniert und injektiv ist, wobei $X/\sim$ die Menge von Äquivalenzklassen ist.

Die Lösungen der Hausaufgaben **5 bis 8** sind vor der Vorlesung am 31.10. abzugeben.

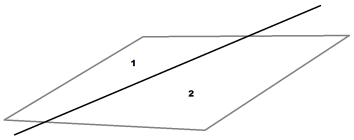
Raumänderungen: Die Übungsgruppe von Herrn Seilberger (Mi 10-12) findet einstweilen im Raum 107 im 1.OG der Robert–Mayer–Str. 10 statt, und die Übungsgruppe von Frau Reitz (Mi 12–14) im Hörsaal H 10 .

Trotz viel guten Zuredens sind die verschiedenen Übungsgruppen extrem unterschiedlich voll. Unter diesen Umständen werden Ihre Hausaufgaben nicht unbedingt von jenem Tutor/jener Tutorin korrigiert, der/die Ihre Übungsgruppe leitet. Die Rückgabe der korrigierten Hausaufgaben könnte sich ebenfalls verzögern.

Musterlösung zu Aufg. 4 (Jeonghoon So):

Wir wollen zeigen, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: In einer Ebene mit n-vielen Geraden in allgemeiner Lage teilen diese die Ebene in $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ viele Gebiete.

Induktionsanfang: $n = 0$: $\frac{1}{2}(0^2 + 0 + 2) = \frac{1}{2}2 = 1$
Ohne eine Gerade wird die Ebene nicht geteilt, bleibt also ganz. Wir haben nur ein Gebiet, und zwar die Ebene selber. Das ist trivial, deswegen überprüfen wir das probeweise nochmal mit $n = 1$: $\frac{1}{2}(1^2 + 1 + 2) = \frac{1}{2}4 = 2$

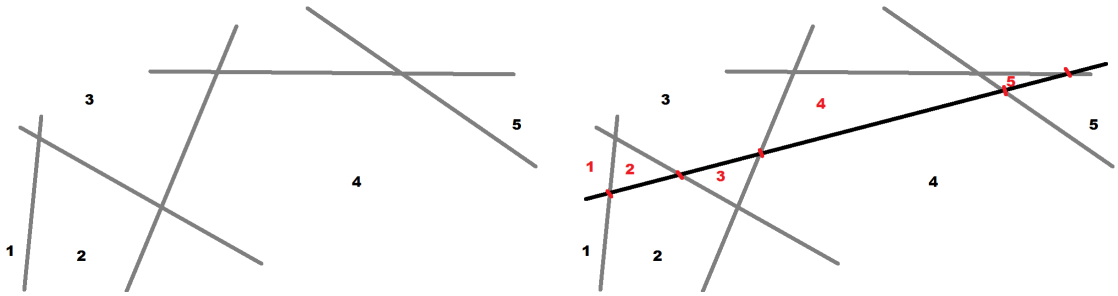


Wenn wir eine Ebene mit genau einer Geraden haben, teilt diese die Ebene genau in zwei Gebiete. Durch die zu beweisende Formel erhalten wir das gleiche Ergebnis. Unsere Formel stimmt also schon für $n = 0$ und $n = 1$.

Induktionsannahme: $\exists n \in \mathbb{N}$, sodass durch n–viele Geraden in allgemeiner Lage in einer zweidimensionaler Ebene diese in $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ viele Gebiete unterteilt wird.

Induktionsschritt $n \to n + 1$:
Man hat n Geraden und somit aus der Induktionsbehauptung genau $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$-viele Gebiete. Wenn man nun eine weitere Gerade hinzufügt, dann schneidet diese Gerade die anderen n–vielen Geraden je einmal, also insgesamt n-mal. (Hier braucht man, dass es keine Parallelität und keine Mehrfachschnittpunkte gibt!)
n–viele Schnittpunkte bedeuten $(n+1)$–viele Gebiete, durch welche die neue Gerade geht. Diese $(n + 1)$-vielen Schnittpunkte kann man über die $(n + 1)$–vielen Teile der Geraden charakterisieren, da jedes dieser Teile natürlich in genau einem Gebiet liegt.
So entstehen $(n + 1)$ zusätzliche Gebiete, da jedes der Gebiete durch die die Gerade geht durch je eins der $(n + 1)$ Teile "halbiert"wird.

Diese Grafik soll verdeutlichen, wie die Schnittpunkte in Zusammenhang mit der Anzahl der Gebiete stehen: Bei n–vielen Schnittpunkten, wird die Gerade in genau $(n + 1)$–viele Teile aufgeteilt.



Dies soll die Veränderung der Ebene nach Hinzufügen einer weiteren Gerade verdeutlichen.

Anzahl der Gebiete bei $n+1$–vielen Geraden in allgemeiner Lage:

$$\frac{1}{2}(n^2+n+2)+(n+1) = \frac{1}{2}(n^2+n+2+2n+2) = \frac{1}{2}(n^2+2n+1+n+1+2)$$
$$= \frac{1}{2}((n+1)^2+(n+1)+2) \qquad \square$$

9. Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Sei $g \circ f : A \to B$ die Verkettung (man vergleiche das Glossar auf der nächsten Seite). Beweisen Sie:

1. Wenn f und g injektiv sind, dann auch $g \circ f$.
2. Wenn f und g surjektiv sind, dann auch $g \circ f$.
3. Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann auch f .
4. Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann auch g .

10. Beweisen Sie: Die Addition in $\mathbb{Z}$ ist wohldefiniert und erfüllt $n+m = m+n$.

11. Zeigen Sie mit Hilfe der *Ringaxiome* (Skriptum, Satz 3.2): Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass $a + x = b$ gilt. Finden Sie außerdem ein Beispiel für $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass es *kein* $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a \cdot x = b$.

12. Beweisen Sie: Wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot b = 0$, dann $a = 0$ oder $b = 0$.

Die Lösungen der Hausaufgaben **9 bis 12** sind vor der Vorlesung am 7.11. abzugeben.
Dringende Bitte: Wenn Sie Ihre Hausaufgaben auf mehreren Blättern aufschreiben, diese dann bitte zusammentackern!

Zeichenerklärung

$\mathbb{N}$: Menge aller natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$

$\mathbb{Z}$: Menge aller ganzen Zahlen $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

$\mathbb{Q}$: Menge aller rationalen Zahlen, d.h. aller Brüche $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$\mathbb{R}$: Menge aller reellen Zahlen.
Anstelle von $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ werden häufig auch die Buchstaben $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ verwendet.

$a \in A$: Das Element a gehört zur Menge A

$A \subset B$ oder $B \supset A$: Jedes $a \in A$ ist auch Element von B oder: A ist *Teilmenge* (auch *Untermenge* genannt) der Menge B, manchmal auch geschrieben als $A \subseteq B$

$A \cup B$: Die *Vereinigung* der Mengen A und B besteht aus allen Elementen, die zu A oder B (oder zu beiden) gehören

$A \cap B$: Der *Durchschnitt* der Mengen A und B besteht aus allen Elementen, die sowohl zu A wie zu B gehören

$\emptyset$: Die *leere Menge*; sie enthält kein Element. Kommt z.B. bei Durchschnitten vor wie $G \cap U = \emptyset$, wenn etwa $G := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$, $U := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$
Hier werden gleich zwei weitere Konventionen benutzt:

Der Ausdruck links von := wird erklärt durch die rechte Seite

Die Menge $\{n \in M \mid E(n)\}$ besteht aus jenen $n \in M$ mit der Eigenschaft $E(n)$, ist also eine Untermenge von M. Die $\{\quad\}$ heißen manchmal *Mengenklammern.* Zur Beschreibung endlicher Mengen darf man einfach ihre Elemente aufzählen und in diese Klammern schreiben, wie z.B. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ Primzahl und } < 20\}$

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ oder $\mathcal{B} \Leftarrow \mathcal{A}$: Aus der Aussage $\mathcal{A}$ folgt die Aussage $\mathcal{B}$, z.B. „n ist durch 4 teilbar" $\Rightarrow$ „n ist durch 2 teilbar"

$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$: Es gelten sowohl $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ als auch $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ (was mitnichten selbstverständlich ist, vgl. das Beispiel eben). Sprechweise: $\mathcal{A}$ gilt *genau dann, wenn* $\mathcal{B}$ gilt.

$f : A \to B : a \mapsto f(a)$: Die *Funktion* f ordnet jedem *Urbild* $a \in A$ der *Urbildmenge* A ein (eindeutiges) *Bild* $f(a) \in B$ zu. f wird auch *Abbildung* genannt

Wenn zusätzlich $g : B \to C : b \mapsto g(b)$ eine Abbildung von B nach C ist, bezeichnet $g \circ f : A \to C : a \mapsto g(f(a))$ die *Hintereinanderausführung, Verkettung* oder *Komposition* der beiden Abbildung: Man wende zuerst f an und auf das Bild dann g

$\forall$: *für alle*

$\exists$: *es gibt ein* . Beides sind sogenannte *Quantoren*, kommen unentwegt in logischen und mathematischen Argumentationen vor. Manchmal schreibt man $\exists!$ für „*es gibt genau ein*", d.h. es gibt eines, aber auch *nur eines*, es ist also eindeutig bestimmt

Musterlösung zu Aufg. 5 (Matthias Seilberger):

a) Aus der binomischen Formel (Skriptum, Satz 2.8) folgt

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .$$

b) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion nach n

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{c} = \binom{n+1}{c+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} .$$

Induktionsanfang $n = 0$: Für $c = 0$ ist

$$\binom{0}{c} + \binom{1}{c} = 1 + 1 = 2 = \binom{2}{1} = \binom{2}{c+1} ,$$

für $c = 1$ erhält man entsprechend $0 + 1 = 1$, und für $c > 1$ sind alle Binomialkoeffizienten in der Formel $= 0$, die Formel stimmt also.

Induktionsvoraussetzung (auch „Induktionsannahme" genannt): Sei die Formel bis zu n bereits gezeigt.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir wollen aus der Induktionsvoraussetzung folgern, dass auch

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{c} = \binom{n+2}{c+1}$$

richtig ist. Dazu zerlegen wir die Summe links in $\sum\limits_{k=0}^{n}$ und das $(n+1)$–te Glied $\binom{n+1}{c}$. Nach Induktionsvoraussetzung steht also links

$$\binom{n+1}{c+1} + \binom{n+1}{c} ,$$

nach Satz 2.7 des Skriptums (Regel für's Pascal'sche Dreieck) gerade $\binom{n+2}{c+1}$, wie gewünscht. (Man beachte, dass dieser Satz 2.7 auch richtig bleibt, wenn $c > n$ ist.)

c) Zu zeigen ist

$$(*_n) \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei a_n das n–te Glied der Fibonaccifolge bezeichnet.
Induktionsanfang: $(*_0)$ und $(*_1)$ stimmen beide, die Formeln heißen dann einfach

$$\binom{0}{0} = 1 = a_1 \quad \text{und} \quad \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 = a_2 .$$

Induktionsvoraussetzung: Alle Formeln $(*_m), 0 \leq m \leq n$, seien bereits bewiesen.

Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir wollen aus der Induktionsvoraussetzung folgern, dass auch

$$(*_{n+1}) \qquad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} = a_{n+2}$$

stimmt. Wegen $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ liegt es nahe, die Summe links in zwei Summen zu zerlegen, die in $(*_n)$ und $(*_{n-1})$ vorkommen. Das letzte Glied mit $k = n+1$ können wir weglassen, weil nach unserer Definitionsergänzung $\binom{0}{n+1} = 0$ ist, und für die übrigen wenden wir wieder Satz 2.7 an: Für $k > 0$ gilt (für $k = 0$ ist der Summand $\binom{n-k}{k-1}$ wegzulassen)

$$\binom{n+1-k}{k} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} \qquad \text{mit} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = a_{n+1}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Die Summe über die zweiten Summanden ist also $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$; wir setzen $h := k-1$, dann wird mit $k = h+1$ und $n-k = n-1-h$

$$\sum_{n=1}^{n} \binom{n-k}{k-1} = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1-h}{h} = a_n \ ,$$

ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung, hier aber $(*_{n-1})$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wichtige Neuerung: Da die Tutoren mit der Korrektur völlig überlastet sind, dürfen die nächsten drei Hausaufgabenblätter (also bis Aufgabe **20** inklusive) jeweils **zu zweit abgegeben** werden. Das ändert nichts daran, dass wörtlich übereinstimmende Lösungen verschiedener Autoren oder Autoren–Paare nicht gewertet werden!

Die Übungsgruppe von Frau Reitz findet im H 10 statt.

Musterlösung zu Aufg. 8 (Maxim Shekhtman):

a) Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass die Relation „ $a \sim b$ für $a, b \in X$ genau dann, wenn $f(a) = f(b)$ " eine Äquivalenzrelation ist.

Um dies zu zeigen, müssen die drei Eigenschaften aus **Definition 1.2** nachgewiesen werden:

(i) Wenn $a \sim a$ für $a \in X$, so ist dies äquivalent zu $f(a) = f(a)$ und damit wahr.
Es gilt also: $a \sim a$.

(ii) Wenn $a \sim b$ für $a, b \in X$, so ist $f(a) = f(b)$ und damit äquivalent zu $f(b) = f(a)$.
Aus $a \sim b$ folgt also $b \sim a$.

(iii) Wenn $a \sim b$ und $b \sim c$ für $a, b, c \in X$, so sind $f(a) = f(b)$ und $f(b) = f(c)$.
Damit gilt also $f(a) = f(b) = f(c)$ und insbesondere $f(a) = f(c)$.
Aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt also $a \sim c$.

b) Man betrachte dazu die Abbildung $g : X/\sim \to Y$, $[x] \mapsto f(x)$.
Die Äquivalenzklassen aus X, also die Elemente von $X/\sim$, seien wie immer mit $[x]$ bezeichnet. (Die Anzahl der Äquivalenzklassen kann endlich oder unendlich sein.) Dieses g ist wohldefiniert, denn:

Die Elemente a einer beliebigen Äquivalenzklasse $[x] \in X/\sim$ sind diejenigen, deren Funktionswerte (für f) den festen (für die Äquivalenzklasse spezifischen) Wert $f(a) = f(x) = g([x])$ annehmen. Seien also $a, b \in [x]$ zwei Repräsentanten der gleichen Äquivalenzklasse. Dann ist in der Tat g wohldefiniert wegen

$$g([a]) = f(a) = f(b) = g([b]) \; \forall a, b \in X \text{ mit } a \sim b$$

c) Zu zeigen ist schließlich: g ist injektiv, also $\forall [a] \neq [b] \in X/\sim$ (also mit $a \not\sim b$) gilt $g([a]) \neq g([b])$. Angenommen, wir hätten stattdessen $g([a]) = g([b])$, dann folgt nach Definition von g und der Äquivalenzklassen direkt $g([a]) = f(a) = f(b) = g([b]) \Rightarrow a \sim b$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

13. Sei A ein Ring. Nutzen Sie nur die Ringaxiome, um zu beweisen dass

$$0 \cdot a = 0, \quad -(-a) = a, \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b, \qquad \forall a, b \in A.$$

14. Sei $x = b_n \cdot g^n + \ldots + b_0 \cdot g^0$ für $g \in \mathbb{N}$ und *Ziffern* $b_j \in \{0, \ldots, g-1\}$. Dann definieren wir $x = (b_n \ldots b_0)_g$ als die Darstellung von x im g-adischen Stellenwertsystem. Für $g = 10$ schreiben wir wie gewohnt $x = b_n \ldots b_0$ anstelle von $x = (b_n \ldots b_0)_{10}$. Berechnen Sie:
a) Die Darstellung von 75 im 2-adischen Stellenwertsystem.
b) Die Darstellung von 223 im 7-adischen Stellenwertsystem.
c) Die Darstellung von $(4321)_5$ im Zehnersystem.
Warum ist immer $(b_n \ldots b_0)_g \equiv b_0 \; (g)$?

15. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b, k \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}\,(k, n) = 1$ und $ka \equiv kb \; (n)$. Zeigen Sie: Dann ist $a \equiv b \; (n)$.

16. Für alle im Zehnersystem geschriebenen $x = b_n \ldots b_1 b_0$ sei $q(x) := b_n + \ldots + b_1 + b_0$ die *Quersumme der Zahl*, also eigentlich die Ziffernsumme. Zeigen Sie, dass die *Neunerprobe* korrekt ist: Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ hat $q(x \cdot y)$ den gleichen Divisionsrest bei Division durch 9 wie die Zahl $q(x) \cdot q(y)$.

Die Lösungen der Hausaufgaben **13 bis 16** sind vor der Vorlesung am 14.11. abzugeben.

17. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Genau dann, wenn $\mathrm{ggT}\,(a, n) = 1$, gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $ax \equiv 1 \; (n)$ (Tipp: euklidischer Algorithmus!)

18. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$.

1. Beweisen Sie, dass $u, v \in \mathbb{Z}$ existieren, so dass

$$u \equiv 0 \ (m), \ u \equiv 1 \ (n) \quad \text{und} \quad v \equiv 1 \ (m), \ v \equiv 0 \ (n).$$

   (Tipp: schon wieder euklidischer Algorithmus!)

2. Beweisen Sie, dass daraus folgt: Für alle $c, d \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $w \in \mathbb{Z}$ mit

$$(*) \qquad w \equiv c \ (n) \qquad \text{und} \qquad w \equiv d \ (m) \quad .$$

3. Bestimmen Sie *alle* Lösungen $w \in \mathbb{Z}$ von $(*)$.

19. Berechnen Sie (nicht mittels Internetrecherche, sondern) mit Hilfe von Kongruenzen modulo 7, dass der 14.11.2072 ein Montag ist. Tipp: Jedes vierte Jahr ist ein Schaltjahr mit 366 Tagen, alle anderen Jahre haben 365 Tage.

20. Man liste alle natürlichen Zahlen von 2 bis 168 auf. Streichen Sie alle Vielfachen von $2, 3, 5, 7, 11$. Warum bleiben nur Primzahlen übrig?

Die Lösungen der Hausaufgaben **17 bis 20** sind vor der Vorlesung am 21.11. abzugeben.

Musterlösung zu Aufg. 15 (Emma Medjedovic):

$ka \equiv kb \ (n)$ heißt: Es gibt ein $s \in \mathbb{Z}$ mit $ka = kb + sn$, also $k(a - b) = sn$ oder $a - b = \frac{sn}{k}$. Diese Zahl ist ganz, aber k und n sind teilerfremd, darum folgt

$$k \mid sn \quad \Rightarrow \quad k \mid s \ , \quad \frac{sn}{k} = qn \quad \text{mit} \quad q \in \mathbb{Z} \ ,$$

also $a - b = qn \quad \Rightarrow \quad a \equiv b \ (n)$. (Für eine ausführlichere Begründung von $k \mid s$ siehe Skriptum, Satz 6.3).

21. Sei $\sim$ die Relation, die auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch

$$(a,b) \sim (m,n) \quad :\Leftrightarrow \quad an = bm$$

gegeben ist. Beweisen Sie, dass „$\sim$" keine Äquivalenzrelation ist.

22. Beweisen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt:

1. $a^2 > 0$, wenn $a \neq 0$.
2. $a > 0,\ c < 1 \quad \Rightarrow \quad a > ac$.
3. $0 < a < b \quad \Leftrightarrow \quad 0 < b^{-1} < a^{-1}$.

Sie dürfen diese Beweise entweder mit Hilfe von Definition 8.1 führen, d.h. die Aussagen auf bekannte Fakten über $\mathbb{Z}$ zurückführen, oder die ersten drei Aussagen aus Satz 8.1 des Skriptums benutzen, so wie es dort für die vierte Aussage vorgemacht wird.

23. Beweisen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 13$ in $\mathbb{Q}$ unlösbar ist.

24. Seien $a, c \in \mathbb{Q}$ mit $a < c$. Beweisen Sie, dass es ein $b \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass $a < b < c$. Folgern Sie daraus, dass zwischen a und c unendlich viele rationale Zahlen liegen.

Die Lösungen der Hausaufgaben **21 bis 24** sind vor der Vorlesung am 28.11. abzugeben.

25. (Variation einer Aufgabe aus einem alten chinesischen Rechenbuch) Neun Piraten haben einen Schatz aus (gleichgroßen) Goldstücken erbeutet und versuchen, diesen Schatz in neun gleiche Teile zu teilen. Dabei bleiben 5 Münzen übrig, und beim Streit um diesen Rest wird ein Pirat erstochen. Bei einem erneuten Verteilungsversuch unter den verbliebenen 8 Piraten bleiben 4 Goldstücke übrig, und beim Gerangel um sie geht ein weiterer Pirat über Bord und ertrinkt. Nun lässt sich der Goldschatz in 7 gleiche Teile teilen. Wieviele Goldmünzen sind es mindestens gewesen?
Tipp: Es handelt sich um eine Fortsetzung der Aufgabe **18**, denn man sucht ein $x \in \mathbb{Z}$ (Anzahl der Goldstücke), welches drei verschiedene Kongruenzen erfüllt.

26. Berechnen Sie die folgenden Limites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+2}$$

27. Die unendliche Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert. Warum? Ermitteln Sie ihren Grenzwert!

28. Eine Aufgabe nur für Sie alleine (die Lösungen sind jetzt ja wieder alleine abzugeben): Sei $a_1 := 1,x$, wobei die Nachkommazahl x die letzten drei Ziffern Ihrer Matrikelnummer sind. Nun berechnen Sie rekursiv (Taschenrechner!)

$$a_2 := \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) \quad , \qquad a_3 := \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right) \quad , \qquad \dots \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

für alle n wenigstens bis zu a_6. Stellen Sie eine Vermutung auf über Konvergenz oder Nicht–Konvergenz der Folge a_n ! Wenn die Folge konvergiert: Was könnte der Grenzwert sein? Versuchen Sie, Ihre Vermutung plausibel zu machen.

Die Lösungen der Hausaufgaben **25 bis 28** sind vor der Vorlesung am 5.12. abzugeben.

29. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen, das heißt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
Beweisen Sie, dass auch die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen sind.

30. Sei $g \in \mathbb{N}$, $g > 1$. Genau wie wir natürliche Zahlen im g–adischen Stellenwertsystem durch eine Ziffernfolge $b_n, \dots, b_1, b_0$ aus $\{0, 1, \dots, g-1\}$ beschreiben (vgl. Satz 4.3 im Skriptum oder Aufg. **14**), können wir jetzt auch rationale (oder sogar reelle) Zahlen analog zu den Dezimalbrüchen in g–adischer *Kommadarstellung* beschreiben, z.B. Zahlen zwischen 0 und 1 in g–adischer Kommadarstellung $(0, b_1 b_2 \dots)_g := \sum_{i=1}^{\infty} g^{-i} \cdot b_i$.
Schreiben Sie die in periodischer g–adischer Kommadarstellung gegebenen Zahlen
$(0,\overline{4})_5$, $(0,\overline{3})_6$, $(0,1\overline{23})_4$ als gewöhnliche Brüche.

31. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{R}$ und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Summenfolge, gegeben durch $S_n := \sum_{i=1}^{n} a_n$. Beweisen Sie: Wenn $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

32. Sei (a_n) die Fibonacci-Folge: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ für $k \geq 2$. Beweisen Sie, dass die Folge

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)_{n>1}$$

eine Nullfolge ist. *Hinweis:* Aufgabe **3**.

Die Lösungen der Hausaufgaben **29 bis 32** sind vor der Vorlesung am 12.12. abzugeben.

Musterlösung zu Aufg. 25 (Joenghoon So):

Aus dem Text erhalten wir die Information, dass, wenn man die Anzahl x der Goldmünzen unter 9 Seeräubern gleichmäßig aufteilt, 5 Stück übrig bleiben.
In der Sprache der MathematikerInnen bedeutet das:

$$x \equiv 4 \text{ modulo } 9$$

Des weiteren gilt, dass das gerechte Aufteilen unter 8 Piraten dafür sorgt, dass man 4 Goldmünzen übrig hat und beim Aufteilen unter 7 Piraten nichts übrig bleibt. Das führt zu den letzten beiden Kongruenzgleichungen:

$$x \equiv 4 \text{ modulo } 8$$
$$x \equiv 0 \text{ modulo } 7$$

Gesucht ist nun das kleinstmögliche positive ganzzahlige x, welches diese drei Kongruenzgleichungen erfüllt. Dafür rechnen wir in zwei Schritten. Im ersten Schritt nutzen wir das Prinzip der diophantischen Gleichung (Satz von Bezout, Satz 6.2 im Skriptum), um einen Wert zu bestimmen, der die ersten beiden Kongruenzen erfüllt.

$$\text{ggT}\,(9,8) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, a, b \in \mathbb{Z} \;:\quad 8a + 9b = 1$$

Auch schon ohne den euklidischen Algorithmus findet man heraus, dass der größte gemeinsame Teiler von 8 und 9 die 1 ist, und wir erhalten $a = -1$ und $b = 1$, da $8 \cdot (-1) + 9 \cdot (+1) = 1$. Es folgt:

$$-8 \equiv 1 \text{ modulo } 9$$
$$9 \equiv 1 \text{ modulo } 8$$

Wir erhalten $x = 5 \cdot (-1) \cdot 8 + 4 \cdot 9$, denn in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ist der zweite Summand gleich null (weil dieser durch 9 teilbar ist) und es gilt $x \equiv 5$, weil $-8 \equiv 1 \bmod 9$. (Hier haben wir im Prinzip den Aufgabenteil **18a** benutzt).
Andererseits ist in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ der erste Summand gleich null, und es gilt $x \equiv 4$, denn $9 \equiv 1 \bmod 8$. Wenn wir den Term für x nun also ausrechnen, erhalten wir $x = -4$ (diese Existenz war bei der **18b** zu zeigen). Wenn überhaupt lösbar, gibt es für Kongruenzen aber immer unendlich viele Lösungen in $\mathbb{Z}$: Aus dem Aufgabenteil **18c** folgt nun, dass wir für alle Lösungen den Restklassenring modulo $8 \cdot 9 = 72$ betrachten müssen. Also:

$$x \equiv -4 \text{ modulo } 72$$

Genauso gehen wir jetzt im zweiten Schritt vor, für die folgenden zwei Gleichungen:

$$x \equiv -4 \text{ modulo } 72$$
$$x \equiv 0 \text{ modulo } 7$$

Aus der diophantischen Gleichung folgt wieder:

$$\mathrm{ggT}\,(7,72) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, c, d \in \mathbb{Z} \;:\quad 7c + 72d = 1$$

Durch den euklidischen Algorithmus erhalten wir $c = 31$ und $d = -3$ Also gilt nach dem gleichen Prinzip:

$$x = 31 \cdot 7 \cdot (-4) - 0 \cdot 3 \cdot 72 = -868$$

Für alle Lösungen gilt wieder nach Aufg. **18c** (mit $72 \cdot 7 = 504$):

$$x \equiv -868 \text{ modulo } 504$$

Wir wählen nun den kleinsten positiven Vertreter:

$$x = 2 \cdot 504 - 868 = 140$$

Also hatten unsere Piraten mindestens 140 Goldmünzen und wenn mehr, dann um ein ganzzahliges Vielfaches von 504.

33. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und heißt *beschränkt*, wenn es $m, M \in \mathbb{R}$ gibt so dass $m < a_n < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Beweisen Sie, dass jede monoton wachsende und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.
2. Folgern Sie daraus, dass die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

34. Berechnen Sie die Quotienten und Reste für folgende Polynomdivisionen.

a) $\dfrac{x^5 + x^4 + x + 1}{x^3 + 1}$ in $\mathbb{F}_2[x]$.

b) $\dfrac{6x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 1}{3x^2 + 5x + 6}$ in $\mathbb{F}_7[x]$.

c) $\dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$ in $\mathbb{Q}[x]$.

35. Berechnen Sie $\mathrm{ggT}\,(x^4 - 1, x^6 - 1)$ in $\mathbb{Q}[x]$.

36. Seien $a(x) = x^4 + x^3 + 5x + 8$ und $b(x) = x^2 - 1$ Polynome in $\mathbb{F}_p[x]$. Berechnen Sie $\mathrm{ggT}\,(a(x), b(x))$ in $\mathbb{F}_p[x]$ für alle Primzahlen p.

Die Lösungen der Hausaufgaben **33 bis 36** sind vor der Vorlesung am 19.12. abzugeben.

Musterlösung zu Aufg. 29 (Jasmin Reitz):

Seien a_n, b_n Nullfolgen. a) Zz.: Summenfolge $(a_n + b_n)$ ebenfalls Nullfolge.

Sei $\epsilon > 0$. Da a_n und b_n konvergieren, $\exists N_\epsilon \in N$, sodass

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ und } |b_n - b| < \epsilon \; \forall\, n \geq N_\epsilon \text{ gilt.}$$

Daraus folgt:

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Mit $a = b = 0 = a + b$ sind wir FERTIG.

b) Zz.:Produktfolge $(a_n \cdot b_n)$ ebenfalls Nullfolge.

Sei $\epsilon, \delta > 0$. Da a_n und b_n gegen 0 konvergieren, $\exists N_\epsilon \in N$, sodass

$$|a_n| < \epsilon \text{ und } |b_n| < \epsilon \; \forall\, n \geq N_\epsilon \text{ gilt.}$$

Wähle: $\epsilon = \sqrt{\delta}$, sei $\delta > 0$. So folgt:

$$|a_n| < \epsilon, \; |b_n| < \epsilon$$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \epsilon \cdot \epsilon = \sqrt{\delta} \cdot \sqrt{\delta} = (\sqrt{\delta})^2 = \delta$$

FERTIG

Probeklausur

In den Aufgaben **37** und **38** ist nur das Ergebnis anzugeben, nur dieses zählt. In den Übungen müssen Sie natürlich erläutern können, wie Sie darauf gekommen sind!

37. Gesucht: $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$ mit

$$17x \equiv 1 \bmod 52\,, \quad 29y \equiv -1 \bmod 60\,, \quad 28u \equiv 3 \bmod 81\,, \quad 27v \equiv 4 \bmod 79\,.$$

38. Schreiben Sie die folgenden, als Brüche im Dezimalsystem geschriebenen rationalen Zahlen in binärer (also 2–adischer) Kommadarstellung mit den Ziffern 0 und 1 :

$$\frac{11}{2} \qquad \frac{5}{16} \qquad \frac{1}{7} \qquad \frac{11}{15}$$

39. Von den folgenden 9 Aussagen sind genau 5 richtig und 4 falsch. Kreuzen Sie die fünf richtigen an, nicht mehr und nicht weniger. Bei 5 Treffern gibt es 4 Punkte, bei 4 Treffern 2 Punkte, und bei 3 Richtigen 1 Punkt. Begründungen sind nicht nötig und werden auch nicht gewertet.

☐ Injektive Abbildungen sind stets auch surjektiv
☐ Für je zwei Mengen mit $A \subset B$ gilt $A \cup B = B$
☐ Die Gleichung $a + x = b$ hat für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Q}$

☐ Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen bildet einen Körper
☐ Es gibt unendlich viele Primzahlen
☐ Die Gleichung $x^2 = 16$ hat keine rationale Lösung

☐ Quadratische Gleichungen sind in $\mathbb{R}$ immer lösbar
☐ Die Folge $n!/n^n$ konvergiert gegen 0
☐ Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|a - b| = |a| + |b|$

40. Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion: Jede Menge mit n Elementen besitzt genau 2^n verschiedene Untermengen. (Man beachte, dass die ganze Menge ebenso wie die leere Menge $\emptyset$ ebenfalls als Untermengen zählen.)

41. K sei ein Körper, K^2 die Menge der geordneten Paare (a, b) von Elementen $a, b \in K$. Eine Relation $\sim$ sei auf K^2 definiert durch

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, r \in K, r \neq 0 \quad \text{mit} \quad (a, b) = (rc, rd)\ .$$

a) Sei zunächst $K = \mathbb{R}$. Wenn – wie in der Analytischen Geometrie oder der Linearen Algebra – die Paare (a, b) Punkte der Ebene mit Koordinaten a und b beschreiben, was bedeutet dann die Relation geometrisch für die Punktmenge?
b) Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.
c) Wieviele Äquivalenzklassen gibt es, wenn $K = \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ ist?

42. K sei ein Körper, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ ein Polynom mit (mindestens) $n-1$ verschiedenen Nullstellen in K. Begründen Sie, warum p eine Zerlegung

$$p(x) \;=\; \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

in n Faktoren $(x - x_i) \in K[x]$ vom Grad 1 besitzt.

Die Lösungen der Aufgaben **37 bis 42** sind vor der Vorlesung am 9.1.2017 abzugeben.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Musterlösung zu Aufg.36

Seien $a(x) = x^4 + x^3 + 5x + 8$ und $b(x) = x^2 - 1$ Polynome in $\mathbb{F}_p[x]$. Wir wollen den $\mathrm{ggT}\,((a(x)), b(x))$ in $\mathbb{F}_p$ berechnen. Wir fangen mit dem Euklidischen Algorithmus an:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & x^2 & +x & +1 \\
\hline
x^2-1 & x^4 & +x^3 & & +5x & +8 \\
 & -x^4 & & +x^2 & & \\
\cline{2-4}
 & & x^3 & +x^2 & +5x & \\
 & & -x^3 & & +x & \\
\cline{3-5}
 & & & x^2 & +6x & +8 \\
 & & & -x^2 & & +1 \\
\cline{4-6}
 & & & & 6x & +9
\end{array}
$$

Also ist

$$x^4 + x^3 + 5x + 8 = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1) + 6x + 9.$$

Wir beachten, dass $6x + 9$ in $\mathbb{F}_3$ null ist, also gilt in diesem Fall

$$\mathrm{ggT}\,((a(x)), b(x)) = x^2 - 1 \in \mathbb{F}_3[x].$$

Im fall $p \neq 3$, ist der Rest nicht null. Dann nutzen wir den Euklidischen Algorithmus noch einmal:

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & & \frac{1}{6}x & -\frac{1}{4} \\
\hline
6x+9 & x^2 & & -1 \\
 & -x^2 & -\frac{3}{2}x & \\
\cline{2-3}
 & & -\frac{3}{2}x & -1 \\
 & & \frac{3}{2}x & +\frac{9}{4} \\
\cline{3-4}
 & & & \frac{5}{4}
\end{array}
$$

Beachten Sie, dass wir ausgenutzt haben, dass 2 invertierbar ist. Daher sollten wir den Fall $\mathbb{F}_2[x]$ ausschließen. Für $p = 2$ ist $6x + 9 = 1$. Es folgt, dass

$$\mathrm{ggT}\,((a(x)), b(x)) = 1 \in \mathbb{F}_2[x].$$

Falls $p \neq 2, 3$, gilt:

$$x^2 - 1 = (6x + 9)(\frac{1}{6}x - \frac{1}{4}) + \frac{5}{4}.$$

Jetzt beachten wir, dass $\frac{5}{4} = 0 \in \mathbb{F}_5$. Also ist

$$\mathrm{ggT}\,((a(x)), b(x)) = 6x + 9 = x - 1 \in \mathbb{F}_5[x].$$

Für $p \neq 2, 3, 5$ ist $\frac{5}{4}$ invertierbar in $\mathbb{F}_p$. Daher ist $\mathrm{ggT}\,((a(x)), b(x)) = 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ für $p \neq 2, 3, 5$ (Beachten Sie, dass der ggT in $K[x]$ nur bis auf Multiplikation mit Einheiten, das heißt bis auf Elemente $\neq 0$ von K definiert ist).

Es gibt noch eine einfachere Art diese Aufgabe zu lösen (Idee von **Felix Ossig**): Da $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ eine einfache Primzerlegung hat, genügt es zu prüfen, ob ± 1 Nullstellen von $a(x) = x^4 + x^3 + 5x + 8$ sind. Da $a(1) = 15$, ist $(x-1)$ nur in $\mathbb{F}_3[x]$ und $\mathbb{F}_5[x]$ ein Teiler von $a(x)$ und da $a(-1) = 3$, ist $(x+1)$ nur in $\mathbb{F}_3[x]$ ein Teiler von $a(x)$. Für alle $p \neq 3, 5$ sind die beiden Polynome also teilerfremd.

Musterlösungen für die Probeklausur

37. Gesucht: $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$ mit

$$17x \equiv 1 \bmod 52\ , \quad 29y \equiv -1 \bmod 60\ , \quad 28u \equiv 3 \bmod 81\ , \quad 27v \equiv 4 \bmod 79\ .$$

$$x = [-3]_{52}\ , \quad y = [-29]_{60}\ , \quad u = [3]_{81}\ , \quad v = [6]_{79}$$

38. Schreiben Sie die folgenden, als Brüche im Dezimalsystem geschriebenen rationalen Zahlen in binärer (also 2–adischer) Kommadarstellung mit den Ziffern 0 und 1 :

$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{11}{15}$
$101,1$	$0,0101$	$0,\overline{001}$	$0,\overline{1011}$

39. Hier sind die richtigen Aussagen angekreuzt:
□ Injektive Abbildungen sind stets auch surjektiv
X Für je zwei Mengen mit $A \subset B$ gilt $A \cup B = B$
X Die Gleichung $a + x = b$ hat für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ eine Lösung $x \in \mathbb{Q}$

□ Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen bildet einen Körper
X Es gibt unendlich viele Primzahlen
□ Die Gleichung $x^2 = 16$ hat keine rationale Lösung

□ Quadratische Gleichungen sind in $\mathbb{R}$ immer lösbar
X Die Folge $n!/n^n$ konvergiert gegen 0
X Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|a - b| = |a| + |b|$

40. Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion: Jede Menge mit n Elementen besitzt genau 2^n verschiedene Untermengen. (Man beachte, dass die ganze Menge ebenso wie die leere Menge $\emptyset$ ebenfalls als Untermengen zählen.)

Beweis. Induktionsanfang: Die Menge $\{1\}$ hat $2 = 2^1$ Untermengen, nämlich sich selbst und $\emptyset$, die Behauptung stimmt also für $n = 1$.
Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, wir wissen bereits, dass $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ genau 2^{n-1} Untermengen U besitzt.

Induktionsschritt: Wir wollen die Anzahl aller Untermengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ bestimmen. Außer den bereits bekannten 2^{n-1} Untermengen $U \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (s. Ind.–Vor.) kommen nun noch alle Untermengen $U \cup \{n\}$ von $\{1, 2, \ldots, n\}$ hinzu, also ebenfalls 2^{n-1} Mengen. Aus $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ folgt die Behauptung.

41. K sei ein Körper, K^2 die Menge der geordneten Paare (a, b) von Elementen $a, b \in K$. Eine Relation $\sim$ sei auf K^2 definiert durch

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, r \in K, r \neq 0 \quad \text{mit} \quad (a, b) = (rc, rd)\ .$$

a) Sei zunächst $K = \mathbb{R}$. Wenn – wie in der Analytischen Geometrie oder der Linearen Algebra – die Paare (a, b) Punkte der Ebene mit Koordinaten a und b beschreiben, was bedeutet dann die Relation geometrisch für die Punktmenge?
b) Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.
c) Wieviele Äquivalenzklassen gibt es, wenn $K = \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ ist?

Lösung. a) Der Nullpunkt $(0, 0)$ ist nur $\sim$ zu sich selbst, für alle anderen Punkte gilt: $(a, b) \sim (c, d)$, wenn beide auf der gleichen Geraden durch den Nullpunkt liegen.
b) Reflexivität: $(a, b) \sim (a, b)$ mit $r = 1$.
Symmetrie: $(a, b) = (rc, rd) \Leftrightarrow (c, d) = (r^{-1}a, r^{-1}b)$. Man beachte $r \neq 0$, also $\exists\, r^{-1} \in K$.
Transitivität: $(a, b) = (rc, rd)$ und $(c, d) = (tu, tv) \Rightarrow (a, b) = (rtu, rtv)$. Dabei ist $rt \neq 0$, weil $r \neq 0 \neq t$, denn K ist nullteilerfrei.
c) Fünf, nämlich $[(0, 0)], [(0, 1)], [(1, 0)], [(1, 1)], [(1, 2)]$. Außer der ersten bestehen alle aus zwei Elementen.

42. K sei ein Körper, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in K[x]$ ein Polynom mit (mindestens) $n-1$ verschiedenen Nullstellen in K. Begründen Sie, warum p eine Zerlegung

$$p(x) \;=\; \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

in n Faktoren $(x - x_i) \in K[x]$ vom Grad 1 besitzt.

Beweis folgt aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung im Polynomring $K[x]$: Zu jeder Nullstelle x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, von p gehört ein Primfaktor $x - x_i$ von p. Da sie alle verschieden sind, ist p teilbar durch $\prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$. Bei der Division kann also nur ein (Prim–)Polynom $x - x_n$ übrigbleiben.

43. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind. Ein Rhombus ist ein Viereck mit gleichlangen Seiten. Beweisen Sie: Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rhombus, wenn seine beiden Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

44. Durch die Länge zweier Seiten und den Winkel, welcher der kürzerer Seite gegenüberliegt, ist ein Dreieck meistens nicht oder zumindest nicht eindeutig bestimmt. Erklären Sie, warum das so ist, und warum es eine Ausnahme zu dieser Regel gibt.

45. Konstruieren Sie ein Dreieck aus den Vorgaben

$$c = 5 \text{ cm} \quad , \quad s_a = 6 \text{ cm} \quad , \quad s_b = 9 \text{ cm} \quad .$$

(mit s_a bzw. s_b ist die Länge der Seitenhalbierenden zur Seite a bzw. b bezeichnet.) Geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!
Tipp: Denken Sie daran, dass sich die Seitenhalbierenden im Schwerpunkt schneiden, und dass dieser die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt.

46. Geben Sie sich zwei kongruente Dreiecke mit Eckpunkten ABC bzw. $A'B'C'$ vor. Es gibt eine (Längen und Winkel erhaltende) Bewegung der Ebene, welche ABC in $A'B'C'$ überführt. Diese Bewegung lässt sich aus höchstens drei Geradenspiegelungen zusammensetzen; wie findet man solche Spiegelungen?

Die Lösungen der Aufgaben **43 bis 46** sind vor der Vorlesung am 16.1.2017 abzugeben.

Was Sie immer schon über die Klausur wissen wollten:

Zeit und Ort: Die Klausur wird geschrieben am **Montag, 6. Februar 2017, von 10.15 bis 11.45 Uhr im Hörsaal V**, die Nachklausur dann am **Dienstag, 11. April, von 10.15 bis 11.45 Uhr** (Datum stand lange Zeit falsch auf der Homepage; den Hörsaal für die Nachklausur werden wir noch bekanntgeben).

Zulassung: Sie sind zur Klausur zugelassen, wenn Sie im Semester mindestens 25+25+15 Hausaufgabenpunkte erreicht haben (Details siehe Homepage). In Zweifelsfällen fragen Sie Ihren Tutor. Für die Nachklausur gelten die gleichen Bedingungen.

Sie dürfen die Nachklausur als Erstversuch nutzen, ich werde allerdings keine Nach–Nach–Klausur schreiben.

Ich hoffe, die Ergebnisse der Korrektur am Donnerstag, 9.2., bekanntgeben zu können (Zimmertür Raum 205 der Robert–Mayer–Str. 6–8 und Homepage, natürlich anonymisiert per Matrikelnummern). Klausureinsicht gibt es nur am Montag, 13.2., von 14.15 bis 16 Uhr im Raum 217 der Robert–Mayer–Str. 6–8. Dort kann ich auch Modulzettel unterschreiben und stempeln; Vordrucke mitbringen!

Sitzordnung und Spielregeln: (Gelten entsprechend auch für die Nachklausur) Jede zweite Reihe bleibt frei, zwischen Ihnen und Ihren nächsten Nachbarn sind drei Plätze frei zu halten.

Verboten ist die Verwendung von Mobiltelefonen, Taschenrechnern, Laptops, Büchern und Skripten. Am besten gar nicht erst mitbringen! Wenn Sie den Tag nicht ohne Ihr Smartphone verbringen können, dann dieses ausschalten und tief in eine verschlossene Tasche versenken. Jeder Betrugsversuch hat Ausschluss aus der Klausur und Note 6 zur Folge. Jeder Teilnehmer muss bis zum Ende der Klausur auf seinem Platz bleiben, die Klausur wird um 11.45 Uhr am Platz eingesammelt. Toilettenbesuch nur einzeln und unter Zurücklassung allen Materials.

Erlaubt ist ein eigenhändig handschriftlich hergestellter DIN A4 –Spickzettel, beidseitig beschrieben (keine Kopie!).

Mitzubringen sind mindestens zwei funktionsfähige Stifte als Schreibzeug sowie ausreichend Papier, ebenso Personalausweis und/oder Goethecard. Diese sichtbar auf den Tisch legen!

Klausurstil und Bewertung: Die Klausur wird aus fünf Aufgaben bestehen, insgesamt bringen sie bei komplett richtiger Lösung 100 Klausurpunkte. In den ersten beiden (Rechen–)Aufgaben sind nur die Ergebnisse anzugeben, und nur diese zählen, Rechenweg egal. Also einfach Resultat auf das Blatt eintragen, fertig. Aufgabe **3** ist eine *multiple–choice*–Aufgabe, in der Sie für neun Behauptungen entscheiden müssen, ob diese richtig oder falsch sind. Die letzten zwei Aufgaben erfordern einen Beweis; diesen auf ein Extrablatt schreiben; auf alle Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnr., bitte leserlich!!

Bestanden ist die Klausur mit 46 Klausurpunkten = 5 Notenpunkte = Note 4 (ausreichend). Von da an geht's gleichmäßig aufwärts bis zu 96 Klausurpunkten = 15 Notenpunkten, beziehungsweise abwärts – aber das wird auf Sie ja sicher nicht zutreffen.

47. Beweisen Sie den Satz des Thales ohne Verwendung des Peripheriewinkelsatzes.

48. In einem rechtwinkligen Dreieck sei eine Kathetenlänge $b = 5$ und die Länge der Höhe auf der Hypotenuse $h = 4$.
a) Zeichnen Sie das Dreieck (mit Konstruktionsbeschreibung).
b) Berechnen Sie die anderen beiden Seitenlängen sowie die Längen der Hypotenusenabschnitte.

49. Gegeben sei ein Dreieck mit Eckpunkten A, B, C. Beweisen Sie, dass das Dreieck genau dann gleichschenklig bei C (d.h. $|AC| = |BC|$) ist, wenn die Winkelhalbierende des Dreiecks bei C und die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ zusammenfallen. Zeigen Sie auch, dass in diesem Fall der Winkel bei A mit dem Winkel bei B übereinstimmt.
Folgern Sie, dass in einem gleichseitigen Dreieck jeder Winkel $60°$ beträgt.

50. Gegeben sei ein beliebiges Viereck. Verbindet man jeweils die Mittelpunkte benachbarter Seiten, erhält man ein zweites Viereck. Die Winkelhalbierenden des zweiten Vierecks schließen ein drittes Viereck ein. Die Winkelhalbierenden des dritten Vierecks schließen ein viertes Viereck ein. Beginnen Sie mit einem beliebigen (unregelmäßigen) Viereck $ABCD$ und führen Sie die obige Konstruktion durch.
Welche besonderen Eigenschaften haben die konstruierten Vierecke? Beweisen Sie diese Eigenschaften!

Die Lösungen der Aufgaben **47 bis 50** sind vor der Vorlesung am 23.1.2017 abzugeben.

Musterlösung zu Aufg. 43 (Emma Medjedovic):

Beweis:
Sei K ein Parallelogramm mit den Ecken $ABCD$, dessen Diagonalen d_1 und d_2 senkrecht aufeinander stehen. Nach Voraussetzung sind alle Winkel am Schnittpunkt P der beiden Diagonalen rechte Winkel und aus Satz 14.1 folgt für die Wechselwinkel an den Eckpunkten B und D, dass $\beta = \gamma$. Aus den Strahlensätzen folgt, dass P die Diagonalen halbiert.
Dann folgt aus dem Satz des Pythagoras $a = \sqrt{(\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2} = b$ (oder ohne Pythagoras aus dem Kongruenzsatz 14.3, sws, angewandt auf die Dreiecke ABP und BPC), und damit ist K ein Rhombus.

Sei nun R ein Rhombus. Da alle Seiten gleich lang sind und $d_{1/2}$ die Grundseiten der Dreiecke ABD und BCD beziehungsweise ABC und ACD sind, folgt aus Satz 14.3 und Satz 14.1, dass R ein Parallelogramm ist. Wie oben halbiert P jeweils die Diagonalen. Nach dem Kongruenzsatz 14.3 sss sind alle vier Teildreiecke ABP, BCP, CDP, DAP kongruent, die Winkel in der Ecke P sind also alle gleich, und je zwei ergänzen sich zum Winkel π. Sie können daher nur $\pi/2$ sein, die Diagonalen stehen somit senkrecht aufeinander.

51. Wie konstruiert man ein Dreieck aus folgenden Angaben? Im Eckpunkt C ist der Winkel $\gamma = \pi/3$, die davon ausgehende Seitenhalbierende hat die Länge $s_c = 3$ und die gegenüberliegende Seite die Länge $c = 4$.

52. Ein *Trapez* ist ein ebenes Viereck, in dem (mindestens) zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind. Ein *Sehnenviereck* ist ein Viereck, dessen vier Eckpunkte auf einem gemeinsamen Umkreis liegen. Man zeige: Ein Sehnenviereck ist genau dann ein Trapez, wenn seine beiden Diagonalen gleichlang sind.

53. Sei $ABCD$ ein Tangentenviereck, d.h. ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind. Diesen Kreis nennt man den Inkreis des Tangentenvierecks. Beweisen Sie, dass die Summe zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der anderen beiden Seiten ist, d.h. es gilt $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$.

54. Gegeben ein regelmäßiges n–Eck, $n > 4$. (*Regelmäßig* bedeutet insbesondere: Alle Eckpunkte liegen auf einem gemeinsamen Umkreis, alle Seiten sind gleichlang.) Man betrachte alle Diagonalen, die von einem festen Eckpunkt ausgehen, und beweise: Je zwei benachbarte Diagonalen schließen einen Winkel π/n ein.

Die Lösungen der Aufgaben **51 bis 54** sind vor der Vorlesung am 30.1.2017 abzugeben.

Musterlösung zu Aufg. 50 (Maxim Shekhtman):

(1) Man betrachtet ein beliebiges Viereck $ABCD$, welches gegen den Uhrzeigersinn an den Ecken mit A, B, C und D beschriftet wird. Nun markiert die Mittelpunkte der Seiten und verbindet die Punkte benachbarter Seiten. Um festzustellen, welche besondere Eigenschaft das eingeschlossene Viereck $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{AD}$ hat, zeichnet man zusätzlich die Diagonalen von $ABCD$ ein. Der Einfachheit halber bezeichnen wir das neue Viereck im folgenden als $PQRS$.
Man betrachtet exemplarisch das Dreieck ABD, in dem auch die Strecke PS enthalten ist. Wegen der Eigenschaften der Seitenmittelpunkte von $ABCD$ gilt $|AS| = |SD|$ und $|AP| = |PB|$. Daraus folgt:

$$\frac{|AS|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{1}{2}.$$

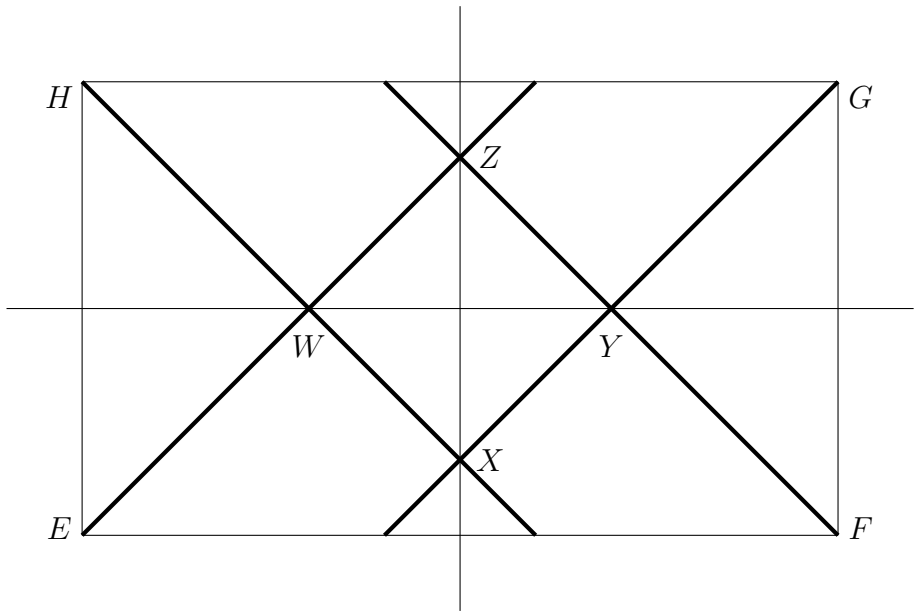
Wegen der Umkehrung des Strahlensatzes (Satz 14.5) müssen die Strecken PS und BD parallel zueinander liegen. Selbiges Argument wendet man auf das Dreieck BDC an und erhält, dass RQ und BD parallel sind. Damit liegen auch PS und RQ parallel zueinander. Analog betrachtet man die Dreiecke ACD und ABC. Man erhält als Resultat, dass die gegenüberliegenden Seiten von $PQRS$ jeweils parallel sind. Damit ist $PQRS$ ein Parallelogramm.

(2) Man zeichnet nun die Winkelhalbierenden der Winkel von $PQRS$ ein, welche das Viereck $EFGH$ einschließen. Da gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm gleich groß sind, liegen die Winkelhalbierenden, welche von gegenüberliegenden Winkeln ausgehen, parallel zueinander. Das eingeschlossene Viereck ist also sicherlich ein Parallelogramm. Die Winkelsumme im Parallelogramm $PQRS$ ist $2 \cdot \measuredangle SPQ + 2 \cdot \measuredangle PSR = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 360^o$. Somit ist $\alpha + \beta = 180^o$. Daraus folgt für die Winkelsumme des Dreiecks PSH:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \measuredangle PHS = 90^o + \measuredangle PHS = 180^o.$$

Daraus ergibt sich, dass $\measuredangle PHS = 90^o$ ist. Dieser Winkel ist aber Wechselwinkel eines Innenwinkels von $EFGH$. Der Winkel ist also auch ein 90°-Winkel. Da $EFGH$ ein Parallelogramm ist, sind alle seine Innenwinkel rechte Winkel. Damit ist $EFGH$ ein Rechteck.

(3) Nun zeichnet man die Winkelhalbierenden der Winkel von $EFGH$ ein und erhält ein neues eingeschlossenes Viereck $WXYZ$. Nach dem Argument von (2) ist $WXYZ$ sicherlich ein Rechteck. Die entstehende Figur (siehe Zeichnung) ist Spiegelungs–symmetrisch bezüglich der Mittelachsen WY und XZ des ursprünglichen Rechtecks. Daraus folgt, dass alle Seiten des inneren Rechtecks gleichlang sind. Damit ist $WXYZ$ ein Quadrat.



Ein paar Trainingsaufgaben für die Nachklausur

55. P sei ein Viereck. Beweisen Sie:
a) P ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich die beiden Diagonalen in ihrem jeweiligen Mittelpunkt schneiden.
b) Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn beide Diagonalen gleichlang sind.

56. D_1 sei ein Dreieck, D_2 sein Mittendreieck, D_3 das Mittendreieck von D_2 u.s.w., also D_{n+1} das Mittendreick von D_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Alle D_n enthalten genau einen gemeinsamen Punkt S, nämlich den Schwerpunkt aller D_n.

57. a_n sei das n–te Glied der Fibonaccifolge. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$3 \mid a_n \quad \Longleftrightarrow \quad 4 \mid n \quad .$$

58. Sei $g \in \mathbb{N}$ beliebig > 1 und $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Beweisen Sie: r hat genau dann eine periodische Dezimalbruchdarstellung, wenn es eine periodische g–adische Kommadarstellung besitzt, also mit den Ziffern $0, 1, \ldots, g-1$ (vgl. Aufgaben **14** und **30**). Hinweis: *Periodisch* heißt nicht unbedingt *rein periodisch*, d.h. ein nicht–periodischer Anfangsteil ist zugelassen, ebenso eine abbrechende Kommadarstellung wie z.B. $b_3b_2b_1b_0, b\overline{c}$ oder $0, b_1b_2 = 0, b_1b_2\overline{0}$.

59. K sei ein Körper. Gibt es Polynome $f, g \in K[x]$, so dass

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2 = x - 1 \quad ?$$

60. Finden Sie alle Nullstellen von $p(x) = x^5 + x^4 - x^2 - x$, wenn a) $p \in \mathbb{R}[x]$, b) $p \in \mathbb{F}_3[x]$, c) $p \in \mathbb{F}_5[x]$ ist. Erinnerung: $\mathbb{F}_q := \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ Körper der Restklassen modulo der Primzahl q.

61. Finden Sie ein Primpolynom 3. Grades a) $p \in \mathbb{Q}[x]$, b) $p \in \mathbb{F}_3[x]$, c) $p \in \mathbb{F}_5[x]$ und zeigen Sie, dass es d) kein Primpolynom 3. Grades in $\mathbb{R}[x]$ gibt.

62. Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit Umkreisradius 6 und Länge der Seitenhalbierenden $s_a = 9$, dabei a eine der beiden Katheten.

Musterlösungen zu 55 bis 62

55. a) P sei ein Parallelogramm. Dann wird es durch die Diagonalen in vier Dreiecke eingeteilt. Da Wechselwinkel an Parallelen gleich sind, sind dabei gegenüberliegende Dreiecke kongruent nach wsw, also halbiert der Mittelpunkt die Diagonalen. Umgekehrt: Wenn der Mittelpunkt die Diagonalen halbiert – und weil gegenüberliegende Winkel am Schnittpunkt gleich sind – sind gegenüberliegende Dreiecke kongruent (sws), gegenüberliegende Seiten sind parallel (Wechselwinkel gleich!), also ist P ein Parallelogramm.
b) könnte man ähnlich mit Hilfe von Kongruenzsätzen behandeln, hier zur Abwechslung aber ein Symmetrie–Argument: Wenn P ein Rechteck ist, hat es zwei zueinander orthogonale Symmetrieachsen; beide Spiegelungen bilden die Diagonalen aufeinander ab, also sind sie gleichlang. Umgekehrt: Wenn die Diagonalen gleichlang sind, betrachte man die Spiegelungen an den beiden Winkelhalbierenden der Diagonalen. Beide führen die Diagonalen ineinander über, lassen also P ungeändert, und das kann nur für ein Rechteck vorkommen.

56. Aus den Strahlensätzen folgt, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks auch die Seitenhalbierenden seines Mittendreiecks sind. Demnach sind die Seitenhalbierenden von D_1 auch Seitenhalbierende von $D_2, D_3, \ldots$, sie schneiden sich auch in jedem dieser Dreiecke,

S ist also Schwerpunkt aller D_n , insbesondere in allen D_n enthalten. Es kann keine anderen Punkte $P \neq S$ geben, die in allen D_n liegen: Wenn man mit m_n den maximalen Abstand zweier Punkte in D_n bezeichnet, dann ist

$$m_{n+1} = \frac{1}{2} m_n \; \forall n \,, \quad \text{also} \quad m_{n+1} = \frac{1}{2^n} m_1 \,,$$

und für genügend großes n ist das kleiner als der Abstand von P zu S .

57. Induktionsanfang: Die Behauptung stimmt für $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$.
Induktionsannahme: Angenommen, wir hätten die Behauptung bis zum Index $4n$ bereits gezeigt, insbesondere also $a_{4n} \equiv 0 \bmod 3$ und $a_{4n-1} = a \not\equiv 0 \bmod 3$.
Induktionsschritt: Dann sind in

$$\begin{aligned}
a_{4n+1} &= a_{4n-1} + a_{4n} \equiv a + 0 = a \bmod 3 \\
a_{4n+2} &= a_{4n} + a_{4n+1} \equiv 0 + a = a \bmod 3 \\
a_{4n+3} &= a_{4n+1} + a_{4n+2} \equiv a + a = 2a \bmod 3 \\
a_{4n+4} &= a_{4n+2} + a_{4n+3} \equiv a + 2a = 3a \equiv 0 \bmod 3
\end{aligned}$$

die ersten drei Ergebnisse nicht durch 3 teilbar, wohl aber das letzte. Damit ist die Behauptung für alle Fibonaccizahlen bewiesen.

58. Wenn r eine periodische Dezimalbruchdarstellung hat, ist r rational, also $= m/n$ mit natürlichen teilerfremden Zahlen m, n . Wenn hier n zu g teilerfremd ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $g^k \equiv 1 \bmod n$ (vgl. Satz 9.2 im Skriptum), also $n \mid g^k - 1$. Dann ist aber – als Limes einer geometrischen Reihe –

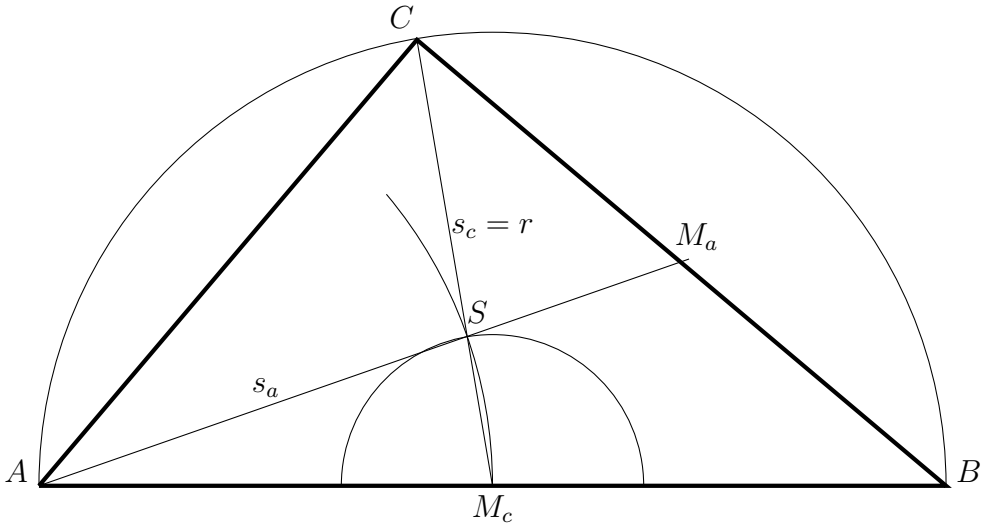
$$\frac{1}{g^k - 1} = \frac{1}{g^k} + \frac{1}{g^{2k}} + \frac{1}{g^{3k}} + \ldots = (0, \overline{00\ldots001})_g$$

periodisch, und ebenso die Zahl m/n als ganzzahliges Vielfaches davon. Wenn n nicht teilerfremd zu g ist, dann gibt es eine g–Potenz, so dass $g^s m/n$ (nach Kürzen) entweder ganzzahlig ist oder einen zu g teilerfremden Nenner besitzt, also eine periodische g–adische Kommadarstellung besitzt. Division durch g^s verschiebt dann nur das Komma.
Der Umkehrschluss von einer periodischen g–adischen Kommadarstellung auf eine periodische Dezimalbruchdarstellung geht genauso.

59. Nein: In $K[x]$ haben wir eindeutige Primfaktorzerlegung (Skriptum, §12), also müssten auf beiden Seiten der Gleichung $f(x)^2 = (x-1)g(x)^2$ die gleichen Primpolynome stehen, und in jeweils gleicher Anzahl. Links steht jeder Primfaktor aber in gerader Anzahl, rechts steht das Primpolynom $(x-1)$ in ungerader Anzahl. Etwas einfacher ist folgendes Argument: Links steht ein Polynom von geradem Grad, rechts eines von ungeradem Grad, Widerspruch! Der Beweis mit Hilfe der Primfaktorzerlegung hat allerdings den Vorzug,

dass er sich auch auf Gleichungen vom Typ $f(x)^2 = x(x-1)g(x)^2$ anwenden lässt.

60. Die drei Nullstellen $0, 1, -1$ kann man raten – ganz egal in welchem Körper! Folglich ist p teilbar durch das Polynom $x(x-1)(x+1) = x^3 - x$. Polynomdivision zeigt $p(x) = (x^3 - x)(x^2 + x + 1)$, wieder unabhängig vom Körper. Bleiben also nur noch die Nullstellen von $x^2 + x + 1$ zu suchen:
a) keine, denn die pq–Formel führt nicht auf Nullstellen in $\mathbb{Q}$.
b) nur $1 \in \mathbb{F}_3$, denn $1 + 1 + 1 \equiv 0 \bmod 3$. In der Tat ist $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$. p hat also 1 sogar als 3–fache Nullstelle.
c) keine Nullstelle in $\mathbb{F}_5$ (nachrechnen!). $x^2 + x + 1$ ist also Primpolynom in $\mathbb{F}_5[x]$, siehe Lösung der nächsten Aufgabe.

61. Ein kubisches Polynom $\in K[x]$ ist prim genau dann, wenn es keine Nullstelle in K besitzt. Wäre nämlich $p(a) = 0$, so wäre bekanntlich $(x - a)$ ein Teiler von p (Skriptum, Satz 12.1). Wenn umgekehrt p nicht prim ist, muss es zwei Teiler besitzen, dabei einen vom Grad 1, also vom Typ $cx + d$ mit $c, d \in K$, $c \neq 0$ und mindestens einer Nullstelle $-\frac{d}{c}$.
a) $x^3 - 2$ prim in $\mathbb{Q}[x]$ ist prim, weil die einzige reelle Nullstelle $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ ist.
b) $x^3 - x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ ist prim, weil es in $\mathbb{F}_3$ immer $\neq 0$ ist (ausprobieren!).
c) $x^3 + x^2 + x + 3 \in \mathbb{F}_5[x]$ ebenso.
d) Kubische Polynome in $\mathbb{R}[x]$ haben immer eine Nullstelle, siehe Satz 12.5 im Skriptum.

62. C liegt auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$, und sein Radius $\overline{CM_c}$ ist gleichzeitig seine Seitenhalbierende s_c. Da der Schwerpunkt S von A die Entfernung $\frac{2}{3}s_a = 6$ und von M_c die Entfernung $\frac{1}{3}s_c = 2$ hat, ist die Konstruktion von S ganz leicht, und C liegt dann auf dem Schnitt der Geraden M_cS mit dem Thaleskreis.