Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

# Algebra

Wintersemester 2016

**Übungsblatt 1** 18. Oktober 2016

**Aufgabe 1.** (Gruppenhomomorphismen, 4 Punkte)

Sei $\varphi : G \to G'$ ein Homomorphismus zwischen zwei Gruppen $G$ und $G'$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen allgemein gelten und welche gelten, wenn $\varphi$ injektiv bzw. surjektiv ist.

(a) Ist $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem von $G$, so ist $\varphi(S)$ eines von $G'$.

(b) Für $g \in G$ gilt: $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(\varphi(g))$.

(c) Ist $G$ abelsch bzw. zyklisch, so ist es auch $G'$.

(d) Liegt $g \in G$ im Zentrum von $G$, so liegt $\varphi(g)$ im Zentrum von $G'$.

**Aufgabe 2.** (Die alternierende Gruppe, 4 Punkte)

Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl und $A_n \subseteq S_n$ die alternierende Gruppe.

(a) Zeigen Sie: $A_n$ operiert $(n-2)$-*fach transitiv* auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$, d.h. zu je zwei $(n-2)$-Tupeln $(i_1, \ldots, i_{n-2})$ und $(j_1, \ldots, j_{n-2})$ mit jeweils paarweise verschiedenen Einträgen aus $\{1, \ldots, n\}$ gibt es genau ein $\sigma \in A_n$ mit $\sigma(i_k) = j_k$ für alle $k = 1, \ldots, n-2$.

(b) Folgern Sie aus Teil (a): Sind $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$, dann gibt es ein $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$, so dass die Zykel $(1, 2, 3)$ und $(i, j, k)$ in $A_n$ konjugiert sind.

*Bemerkung: Auch wenn die Zykel $(1, 2, 3)$ und $(i, j, k)$ nach dem Kochtopflemma aus der Vorlesung Grundlagen der Algebra in $S_n$ konjugiert sind, bedeutet das nicht, dass sie auch in $A_n$ konjugiert sind!*

(c) Zeigen Sie: Sind $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise verschieden, so sind $(1, 2)(3, 4)$ und $(i, j)(k, l)$ in $A_n$ konjugiert.

(d) Bestimmen Sie die Konjutationsklassen in $A_4$ und die Zentralisatoren der Elemente $(1, 2, 3)$ und $(1, 2)(3, 4)$

—— **bitte wenden** ——

**Aufgabe 3.** (Polynome, 4 Punkte)

Sei $K$ ein Körper und sei $f \in K[X]$.

(a) Sei $\deg(f) \geq 2$. Zeigen Sie: Ist $f$ irreduzibel, so hat $f$ keine Nullstelle. Die Umkehrung gilt, wenn $\deg(f) \leq 3$.

(b) Finden Sie einen Körper $K$ und ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad 4, für das die Umkehrung im Teil (a) nicht gilt.

(c) Was kann man über die Primfaktorzerlegung von $f$ in den Fällen $\deg(f) = 0$ und $\deg(f) = 1$ sagen?

**Aufgabe 4.** ($\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ als Faktorring, 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Es gibt eindeutig bestimmte Ringhomomorphismen

$$f, g : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$$

mit $f(a) = g(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ und $f(X) = \sqrt{2}$, $g(X) = -\sqrt{2}$, wobei $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ die positive Quadratwurzel von 2 bezeichnet.

(b) Finden Sie ein normiertes Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$, welches das Ideal $\ker(f)$ erzeugt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(g) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C},$$

und folgern Sie mithilfe des Homomorphiesatzes, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körper ist.

(d) Zeigen Sie: Ist $\sigma : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ein Körperautomorphismus, so ist

$$\sigma(\sqrt{2}) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}.$$

In beiden Fällen gibt es jeweils genau einen solchen Automorphismus.

*Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\sigma(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt.*

---

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **25. Oktober 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`

---