

## 1. Übungsblatt (erschienen am 18.10.2016)

### Aufgabe 1.1 (Votieraufgabe)

Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Funktion, d.h. es gibt  $a \in \mathbb{R}$  und  $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $f(x) := a + b^\top x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass  $f$  weder lokale noch globale Minima besitzt.

### Aufgabe 1.2 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]

Seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^m$  gegeben,  $A, b \neq 0$ .

(a) Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

(i)  $x \in \mathbb{R}^n$  löst das *lineare Ausgleichsproblem*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2.$$

(ii)  $x \in \mathbb{R}^n$  löst die *Gaußsche Normalengleichung*

$$A^\top Ax = A^\top b.$$

(b) Es gelte nun  $\text{Rg}(A) = n$ . Beweisen Sie die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$  aus Aufgabenteil (a).

### Aufgabe 1.3 (Multiple Choice)[1.5 Punkte]

(a) Für eine Funktion  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  gilt: Die Stetigkeit von  $g$  ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass  $g$  auf  $K$  ein Minimum annimmt.

wahr  falsch

(b) Die Bedingung  $\text{Rg}(A) = n$  in Aufgabe 1.2b ist notwendig für die Eindeutigkeit der Lösung.

wahr  falsch

(c) Die Bedingung  $\text{Rg}(A) = n$  in Aufgabe 1.2b ist notwendig für die Existenz der Lösung.

wahr  falsch

### Aufgabe 1.4 (Votieraufgabe)

Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $x_0, x_1 \in U$  Punkte und  $\mathbb{R} \ni t \mapsto x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ . Es gelte  $[x_0, x_1] := \{x_t : t \in [0, 1]\} \subset U$ . Zeigen Sie:

(a) Die Funktion

$$g: t \mapsto f(x_t)$$

ist auf einer Umgebung von  $[0, 1]$  stetig differenzierbar und es gilt

$$g'(t) = \nabla f(x_t)^\top (x_1 - x_0).$$

(b) Ist  $f$  zweimal stetig differenzierbar, dann ist auch  $g$  zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$g''(t) = (x_1 - x_0)^\top \nabla^2 f(x_t) (x_1 - x_0).$$

### Aufgabe 1.5 (Programmieraufgabe)[5 Punkte]

Wir interessieren uns für das Minimalflächenproblem, vgl. Kapitel 1.3.1 der Vorlesung.

Dazu betrachten wir  $\Omega := [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  und diskretisieren  $\Omega$  durch ein äquidistantes Punktegitter mit der Schrittweite  $h = 1/(n - 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sodass die Koordinaten der  $N := n^2$  Punkte gegeben sind durch  $x_{i+(j-1)n} := ((i - 1)h, (j - 1)h) \in \Omega$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , vgl. Abbildung 1. Die so entstehenden Quadrate werden entsprechend Abbildung 1 halbiert, wodurch wir eine Triangulierung aus  $2(n - 1)^2$  Dreiecken erhalten.

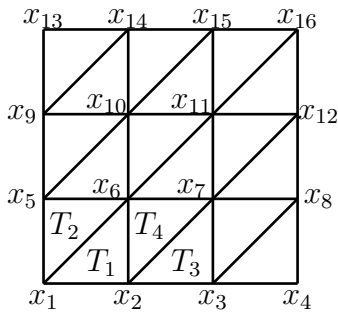


Abbildung 1: Die Triangulierung für  $n = 4$ .

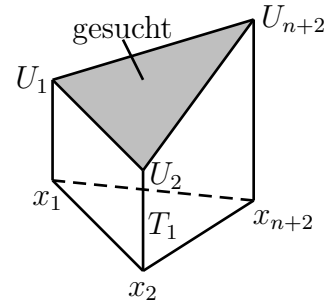


Abbildung 2: Beispiel der gesuchten Fläche des Graphen (grau) für  $T_1$ .

Wir approximieren die in Kapitel 1.3.1 der Vorlesung gesuchte Funktion  $u$  durch einen Vektor  $U = (U_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$  von Funktionsauswertungen  $U_i = u(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  und interessieren uns für den Flächeninhalt  $A(U)$  des Graphen der zugehörigen stetigen und stückweise linearen Funktionen, vgl. Abbildung 2.

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function [A] = Inhalt(U, n)
```

welche zu einem gegebenen Vektor  $U \in \mathbb{R}^N$  von Funktionswerten den Flächeninhalt  $A(U)$  des zugehörigen Graphen bestimmt.

(b) Testen Sie ihre Funktion am Beispiel  $n = 6$  und  $U = \mathbb{1} \in \mathbb{R}^N$ , sowie  $n = 4$  und  $U = (0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6)$ . Veranschaulichen Sie die Flächen graphisch.

## Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 25.10.2016 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 25.10.2016 um 10:00 Uhr an [jahn@mathematik.uni-frankfurt.de](mailto:jahn@mathematik.uni-frankfurt.de) geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Opt1\_1617:**".
- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt.**