GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

1. Übungsblatt (erschienen am 19.10.2016)

Aufgabe 1.1 (Votieraufgabe)
Zu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und einer Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definieren wir

$$\varphi_n := \varphi(x+h_n) \quad \text{und} \quad \psi_n := \frac{\varphi_n - \varphi}{h_n}.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi_n \to \varphi$ und $\psi_n \to \varphi'$ (in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$).

Aufgabe 1.2 (Votieraufgabe)
Betrachten Sie die Funktionen $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\rho(x/\epsilon)$ definiert in Beispiel 2.2 der Vorlesung. Gibt es ein $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, sodass die Folge $(\rho_\epsilon)_{\epsilon\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gegen φ konvergiert? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 1.3 (Schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Stetige lineare Funktionale $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ heißen *Distributionen*. Die Menge aller Distributionen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(\Omega)$. Für die Anwendung von f auf eine Testfunktion φ schreiben wir $f(\varphi)$ oder $\langle f, \varphi\rangle$.

Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage verwenden: ein lineares Funktional $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig auf $\mathcal{D}$, falls es folgenstetig ist, also

$$\langle f, \varphi_k\rangle \to \langle f, \varphi\rangle \text{ (in } \mathbb{R}) \quad \text{für alle } (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D} \text{ mit } \varphi_k \to \varphi \text{ (in } \mathcal{D}).$$

Wir definieren die folgenden Funktionale $T_i :\ \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 6$, durch:

$$\begin{aligned}
T_1(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{k} D^j\varphi(0) & \qquad T_2(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{\infty} D^j\varphi(0)\\
T_3(\varphi) &:= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j) & \qquad T_4(\varphi) &:= \max_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)\\
T_5(\varphi) &:= \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x & \qquad T_6(\varphi) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Welches dieser Funktionale definiert eine Distribution?

Aufgabe 1.4 (Programmieraufgabe)[3 Punkte]
Schreiben Sie ein Programm, dass mittels finiter Differenzen die Lösung u von

$$-(k(x)u'(x))' = f(x), \quad x \in (-1,1), \quad u(-1) = 0 = u(1),$$

mit $f(x) := 1$ und

$$k(x) := 1 \quad \text{für } x \in (-1,0), \qquad k(x) := 2 \quad \text{für } x \in (0,1)$$

approximiert.

Diskretisieren Sie dazu zu einem $N \in \mathbb{N}$ und dazugehöriger Schrittweite $h := \frac{2}{N}$ auf einem äquidistanten Gitter $x_i = -1 + ih$, $i = 0, \ldots, N$ mit Zwischenpunkten $x_{i+1/2} = -1 + (i+1/2)h$ die linke Seite der Gleichung

$$-(k(x)u'(x))' \qquad \text{durch} \qquad -\left[k(x_{i+1/2})\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h^2} - k(x_{i-1/2})\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h^2}\right]$$

und lösen Sie das resultierende lineare Gleichungssystem unter Beachtung der Randbedingungen $u(-1) = 0 = u(1)$.

Testen Sie ihr Programm für verschiedene N und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der schwachen Lösung aus Bemerkung 1.1 der Vorlesung.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 27.10.2016 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Übungleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungleiter geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben** soll bis zum 27.10.2016 um 12:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in `MATLAB`-Code an ihren Übungleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"PDGL1_2016_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 2 sind, so soll die Betreffzeile mit "PDGL1_2016_2:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 1 werden in den Übungen zwischen dem 31.10.-03.11.2016 besprochen.