Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016

Übungsblatt 2 25. Oktober 2016

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Sei $f := T^3 + T^2 \in \mathbb{Q}[T]$. Ferner bezeichne α die Restklasse von T in $\mathbb{Q}[T]/(f)$.

(a) Bestimmen Sie jeweils ein Polynom vom Grad ≤ 2, welches folgende Ausdrücke in $\mathbb{Q}[T]/(f)$ repräsentiert, soweit es Sinn macht:

$$(\alpha^2 + \alpha)^2, \quad (\alpha^2 + 2\alpha + 1)^{-1}, \quad \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass folgender $\mathbb{Q}$-Algebrenisomorphismus besteht:

$$\mathbb{Q}[T]/(f) \cong \mathbb{Q}[T]/(T^2) \times \mathbb{Q}.$$

Ist $\mathbb{Q}[T]/(f)$ isomorph zur $\mathbb{Q}$-Algebra $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation? Begründen Sie Ihre Antwort!

Tipp: Betrachten Sie die Gleichung $X^2 = 0$ über den beiden $\mathbb{Q}$-Algebren.

Aufgabe 6. (Körpererweiterung als Vektorraum, 4 Punkte)

Gegeben sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \mathrm{i}) \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie den Grad $[K : \mathbb{Q}]$ sowie eine Basis von K als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(b) Für $\alpha \in K$ definieren wir die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung

$$m_\alpha : K \longrightarrow K, \quad x \longmapsto \alpha x.$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, dessen Nullstellen in $\mathbb{C}$, und das Minimalpolynom für $m_{\sqrt{2}}$ und $m_{\sqrt{2}+\mathrm{i}}$.

(c) Bestimmen Sie Minimalpolynome von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}+\mathrm{i}$ über $\mathbb{Q}$ gemäß Definition aus der Vorlesung. Vergleichen Sie sie mit Ihren Ergebnissen aus Teil (b).

(d) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + \mathrm{i}$ ein primitives Element der Körpererweiterung $K/\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 7. (endliche Körpererweiterung, 4 Punkte)

(a) Sei L/K eine Körpererweiterung vom Primzahlgrad. Zeigen Sie, dass $K(\alpha) = L$ für alle $\alpha \in L \setminus K$ gilt.

(b) Finden Sie eine Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ vom Grad 4 und ein $\alpha \in L \setminus \mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}(\alpha) \neq L$.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 8. (Transzendenz, 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass höchstens eine der beiden Zahlen $e+\pi$ und $e\pi$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ sein kann. Dabei dürfen Sie verwenden, dass e und π beide transzendent über $\mathbb{Q}$ sind.

Tipp: Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(e,\pi)/\mathbb{Q}(e+\pi, e\pi)$ *algebraisch ist.*

Bemerkung: Man vermutet, dass $e+\pi$ *und* $e\pi$ *beide transzendent sind, nicht einmal einer polynomialen Gleichung in zwei Variablen genügen. Es ist noch unbekannt, ob* $e+\pi$ *oder* $e\pi$ *transzendent über* $\mathbb{Q}$ *ist.*

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **01. November 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`
