

## Tutoriumsaufgaben zu Blatt 2

### Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto a + b$$

eine Verknüpfung auf  $\mathbb{N}$  ist.

Ist  $- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (a, b) \mapsto a - b$  eine Verknüpfung auf  $\mathbb{N}$ ?

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge  $M$  mit Verknüpfung  $\circ$ , so dass  $(M, \circ)$

- (i) die Axiome (N), (I), (A) aber nicht (K) erfüllt;
- (ii) die Axiome (N), (K), (A) aber nicht (I) erfüllt;
- (iii) die Axiome (K), (A) aber nicht (I) und (N) erfüllt.

### Aufgabe 2

Sei  $(G, \circ)$  eine abelsche Gruppe und  $n \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass

$$p_n : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^n$$

ein Homomorphismus ist.

Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe an, für die  $p_n$  kein Homomorphismus ist.

### Aufgabe 3

(a) Sei  $G = \{\pm 1\} \subset \mathbb{Z}$ . Mit der gewöhnlichen Multiplikation von  $\mathbb{Z}$  wird dies zu einer Gruppe. Stellen Sie die Verknüpfungstafel von  $G$  auf.

(b) Sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe und  $y \in G$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$m_y : G \rightarrow G, \quad x \mapsto y \cdot x$$

bijektiv ist. Was bedeutet dies für die Verknüpfungstafel einer Gruppe?

### Aufgabe 4

(a) Sei  $(G, \circ) = (\{e, a, b, c\}, \circ)$  eine Gruppe mit Neutralement  $e$ . Geben Sie alle möglichen Verknüpfungstafeln zu  $(G, \circ)$  an. Welche sind isomorph?

(b) Geben Sie eine Verknüpfungstafel zu einer sechs-elementigen Gruppe an, die nicht isomorph zu  $S_3$  ist.