Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016

Übungsblatt 3 01. November 2016

Aufgabe 9. (Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal, 4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\cos \frac{2\pi}{9} \in \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Konstruktion eines regelmäßigen 9-Ecks mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.

Aufgabe 10. (Lokalisierung I, 4 Punkte)

(a) Sei R ein Ring und seien $S_1, S_2 \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossene Teilmengen mit $S_1 \subseteq S_2$. Zeigen Sie:

(i) Es existiert ein Ringhomomorphismus

$$S_1^{-1}R \longrightarrow S_2^{-1}R, \ \frac{r}{s} \longmapsto \frac{r}{s}.$$

(ii) Enthält S_2 keine Nullteiler, so ist der obige Homomorphismus injektiv.

(b) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie jeweils, dass die gegebene Teilmenge $S \subseteq \mathbb{Z}$ multiplikativ abgeschlossen ist, und beschreiben Sie $S^{-1}\mathbb{Z}$ als Unterring von $\mathbb{Q}$.

(i) $S = \mathbb{Z} \setminus (p)$.

(ii) $S = \{1, p, p^2, \ldots\}$.

Aufgabe 11. (Lokalisierung II, 4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, p ein Primzahl und $e \in \mathbb{N}$ maximal mit $p^e \mid n$. Ferner sei $R := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $S := R \setminus (p\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subseteq R$.

(a) Zeigen Sie, dass S multiplikativ abgeschlossen ist.

(b) Bestimmen Sie die Lokalisierung $S^{-1}R$, indem Sie einen Isomorphismus zwischen $S^{-1}R$ und einem bekannten Ring konstruieren.

Tipp: Es könnte hilfreich sein, zunächst die Mächtigkeit von $S^{-1}R$ zu bestimmen.

Aufgabe 12. (transzendente Erweiterung, 4 Punkte)

Seien $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$ transzendent über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass es genau einen Körperisomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\beta)$ mit $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ gibt, und dass φ bezüglich der von $\mathbb{R}$ geerbten Topologie nicht stetig ist.

Tipp: Zeigen Sie, dass sich ein stetiger Isomorphismus zu einem Automorphismus von $\mathbb{R}$ fortsetzen würde.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **08. November 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`