

Algebra

Wintersemester 2016

Übungsblatt 4

08. November 2016

Aufgabe 13. (quadratische Erweiterungen, 4 Punkte)

Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$ und seien $a, b \in K^\times$. Zeigen Sie, dass es genau dann einen K -Isomorphismus zwischen $K(\sqrt{a})$ und $K(\sqrt{b})$ gibt, wenn a/b ein Quadrat in K ist.

Aufgabe 14. (Körpereinbettungen, 4 Punkte)

Es sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) \subseteq \mathbb{C}$.

- Bestimmen Sie den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.
- Beschreiben Sie alle \mathbb{Q} -Homomorphismen in $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$.
Welche dieser Homomorphismen haben dasselbe Bild in \mathbb{C} ?
- Bestimmen Sie alle möglichen Bilder von $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ unter einem beliebigen \mathbb{Q} -Homomorphismus $K \rightarrow \mathbb{C}$.
- Zeigen Sie, dass α ein primitives Element der Körpererweiterung K/\mathbb{Q} ist. Was ist das Minimalpolynom von α über \mathbb{Q} ?

Aufgabe 15. (Nullstellen in $K[\varepsilon]$, 4 Punkte)

Sei K ein Körper und $f(T) := T^2 \in K[T]$. Ferner sei $K[\varepsilon]$ die K -Algebra, die als K -Vektorraum die Basis $\{1, \varepsilon\}$ hat, d.h.

$$K[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in K\},$$

und deren Multiplikation durch $\varepsilon^2 = 0$ erklärt ist.

- Bestimmen Sie alle Nullstellen von f in $K[\varepsilon]$.
- Geben Sie alle möglichen Linearfaktorzerlegungen von f über $K[\varepsilon]$ an.

Aufgabe 16. (Zerfällungskörper, 4 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[T]$ jeweils den Zerfällungskörper über \mathbb{Q} als Unterkörper von \mathbb{C} sowie den Grad des Zerfällungskörpers über \mathbb{Q} :

- $T^2 + 1$.
- $T^3 - 2$.
- $T^4 + 4$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **15. November 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra
