

## 5. Übungsblatt (erschienen am 15.11.2016)

### Aufgabe 5.1 (Votieraufgabe)

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sei eine durch das allgemeine Abstiegsverfahren erzeugte Folge und es gilt  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ . Zeigen Sie:

- (a) Sind  $\bar{x}$  und  $\hat{x}$  zwei Häufungspunkte der Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , dann gilt  $f(\bar{x}) = f(\hat{x})$ .
- (b) Ist  $\bar{x}$  ein Häufungspunkt der Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , so ist  $f(\bar{x})$  kein striktes lokales Maximum. Gilt diese Aussage auch in dem Fall, dass das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht?

### Aufgabe 5.2 (Votieraufgabe)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Suchrichtungen des allgemeinen Abstiegsverfahrens zulässig sind, wenn sie die Winkelbedingung erfüllen. Zeigen Sie, dass die Suchrichtungen bereits zulässig sind, wenn sie eine der verallgemeinerten Winkelbedingungen erfüllen:

- (a)  $\exists \alpha > 0, p > -1 : \frac{-\nabla f(x_k)^\top d_k}{\|\nabla f(x_k)\| \|d_k\|} \geq \alpha \|\nabla f(x_k)\|^p$
- (b)  $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0, p > -1 : \frac{-\nabla f(x_k)^\top d_k}{\|\nabla f(x_k)\| \|d_k\|} \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2 \|\nabla f(x_k)\|^p\}$

### Aufgabe 5.3 (Multiple Choice)[2.5 Punkte]

In dieser Aufgabe sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion. Weiterhin betrachten wir das allgemeine Abstiegsverfahren (Algorithmus 3 der Vorlesung).

- (a) Die Suchrichtungen  $d_k = -2^{-k} \nabla f(x_k)$  sind zulässig. wahr  falsch
- (b) Sei  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , mit  $\phi(x) = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ , monoton wachsend. Dann sind die  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  zulässig, falls  $-\nabla f(x_k)^\top d_k \geq \phi(\|\nabla f(x_k)\|) \|d_k\|, \forall k \in \mathbb{N}$ . wahr  falsch
- (c) Die  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sind zulässig, falls  $f(x_k + s_k d_k) < f(x_k), \forall k \in \mathbb{N}$  gilt,  $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Abstiegsrichtungen sind und es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  gibt, so dass für jede konvergente Teilfolge  $(x_l)_{l \in L}$  der Iterierten gilt:  $\frac{-\nabla f(x_l)^\top d_l}{\|d_l\|} \geq \varepsilon \implies f(x_l) - f(x_l + s_l d_l) \geq \delta(\varepsilon), \forall l \in L$ . wahr  falsch

### Aufgabe 5.4 (Schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]

Seien  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $\beta, \gamma \in (0, 1)$  gegeben und sei  $d_k$  immer eine Abstiegsrichtung. Bei der **Armijo-Schrittweitenregel mit Aufweitung** wird eine Schrittweite  $s_k \in \{\dots, \beta^3, \beta^2, \beta, 1, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\beta^3}, \dots\}$  gesucht, welche die beiden Bedingungen

$$f(x_k + s_k d_k) \leq f(x_k) + \gamma s_k \nabla f(x_k)^\top d_k \quad (1)$$

$$f\left(x_k + \frac{s_k}{\beta} d_k\right) > f(x_k) + \gamma \frac{s_k}{\beta} \nabla f(x_k)^\top d_k \quad (2)$$

erfüllt. Zeigen Sie: Ist die Niveaumenge  $N_f(x_k) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_k)\}$  beschränkt, so terminiert Algorithmus 1 nach endlich vielen Schritten mit einer Schrittweite, welche (1) und (2) erfüllt.

---

**Algorithm 1** Armijo-Schrittweitenregel mit Aufweitung

---

**Gegeben:** Armijo-Parameter  $\beta \in (0, 1)$  und  $\gamma \in (0, 1)$

**Gegeben:** aktuelle Iterierte  $x_k$ , Abstiegsrichtung  $d_k$

$s_k := 1/\beta$

**repeat**

$s_k := \beta s_k$

$x_{k+1} := x_k + s_k d_k$

**until**  $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \gamma s_k \nabla f(x_k)^\top d_k$

**repeat**

$s_k := \frac{s_k}{\beta}$

$x_{k+1} := x_k + s_k d_k$

**until**  $f(x_{k+1}) > f(x_k) + \gamma s_k \nabla f(x_k)^\top d_k$

$s_k := \beta s_k$

$x_{k+1} := x_k + s_k d_k$

**return**  $x_{k+1}$

---

**Aufgabe 5.5 (Programmieraufgabe zum Votieren)**

Wir betrachten wieder das Minimalflächenproblem aus Kapitel 1.3.1 der Vorlesung. Dabei übernehmen wir die Diskretisierung und Notation aus Aufgabe 1.5. Wir geben nun Randwerte  $r: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  vor und führen  $L \subset N$  die Indexmenge der Randknoten ein, sodass  $U_i = r(x_i)$ ,  $i \in L$  gefordert wird. In dieser Aufgabe soll das eigentliche Optimierungsproblem

$$A(U) \rightarrow \min! \quad \text{u.d.N. } U \in \mathbb{R}^N, U_i = r(x_i), i \in L \quad (3)$$

gelöst werden. Verwenden Sie dazu die MATLAB-Funktion aus Aufgabe 1.5 um zu gegebenem  $U \in \mathbb{R}^N$  den Flächeninhalt  $A(U)$  zu berechnen. Weiter seien die Randwerte  $r_1(x, y) = 1$  und  $r_2(x, y) = \sin(xy\pi)$  gegeben.

- Verallgemeinern Sie den Algorithmus aus Aufgabe 2.6 um (3) zu lösen. Testen Sie das Verfahren mit dem Randwert  $r_1$ , dem Anfangswert  $u_1(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in (0, 1)^2$ ,  $n = 5$ ,  $h = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$  sowie mit dem Randwert  $r_2$ , dem Anfangswert  $u_2(x, y) = \sin(xy\pi)$ ,  $(x, y) \in (0, 1)^2$ ,  $n = 20$ ,  $h = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
- Bestimmen Sie den Gradienten von  $A$ .  
*Hinweis:* Durch die Randwerte sind die Randknoten keine Freiheitsgrade mehr. Der Gradient muss nur in den inneren Knoten berechnet werden.
- Verwenden Sie das Gradientenverfahren mit Armijo-Schrittweitenregel aus Aufgabe 3.5 um (3) zu lösen. Testen Sie das Verfahren mit dem Randwert  $r_1$ , dem Anfangswert  $u_1(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in (0, 1)^2$ ,  $n = 5$  und  $\varepsilon = 10^{-6}$  sowie mit dem Randwert  $r_2$ , dem Anfangswert  $u_2(x, y) = \sin(xy\pi)$ ,  $(x, y) \in (0, 1)^2$ ,  $n = 20$  und  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Verwenden Sie stets  $\beta = 0.5$  und  $\gamma = 0.01$ .  $\varepsilon$  ist hier als Abbruchtoleranz für die Norm des Gradienten zu verstehen.
- Visualisieren Sie ihre Ergebnisse. Was können Sie über die Geschwindigkeit der Verfahren sagen?

## Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, welche bis zum 22.11.2016 10:00 Uhr in Kasten 42, Robert-Mayer-Str. 6-8 dritter Stock, abzugeben ist.
- Zu **Programmieraufgaben** soll eine kommentierte Ausarbeitung in MATLAB-Code bis zum 22.11.2016 um 10:00 Uhr an **jahn@math.uni-frankfurt.de** geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Opt5\_1617:**".
- Zu **Multiple Choice Aufgaben** soll die Lösung auf diesem Übungsblatt angekreuzt werden. Geben Sie das Blatt versehen mit ihrem Namen zusammen mit der schriftlichen Abgabe ab. **Eine Begründung oder Ausarbeitung wird nicht verlangt.**