

## Algebra

Wintersemester 2016

### Übungsblatt 5

15. November 2016

Auf diesem Blatt bezeichne stets  $K$  einen Körper und  $\overline{K}$  seinen algebraischen Abschluss.

#### Aufgabe 17. (Kompositum, 4 Punkte)

Sei  $E/K$  eine Körpererweiterung. Ferner seien  $L_1, L_2$  Zwischenkörper, die über  $K$  endlich sind. Zeigen Sie:

- (a) Die Körpererweiterung  $L_1L_2/K$  ist ebenfalls endlich und es gilt:

$$[L_1L_2 : K] \leq [L_1 : K][L_2 : K].$$

- (b) Sind  $[L_1 : K]$  und  $[L_2 : K]$  teilerfremd, so gilt in (a) die Gleichheit.  
(c) Finden Sie für  $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$  zwei Zwischenkörper  $L_1, L_2$ , die endlich über  $\mathbb{Q}$  sind, so dass  $[L_1L_2 : \mathbb{Q}]$  kein Teiler von  $[L_1 : \mathbb{Q}][L_2 : \mathbb{Q}]$  ist.

#### Aufgabe 18. (Algebraischer Abschluss, 4 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Ist  $K$  abzählbar, so ist  $\overline{K}$  ebenfalls abzählbar.  
*Tipp: Sie dürfen verwenden, dass jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.*  
(b) Ist  $K$  endlich, so ist  $\overline{K}/K$  eine unendliche algebraische Körpererweiterung.  
*Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass ein endlicher Körper nie algebraisch abgeschlossen sein kann.*

#### Aufgabe 19. ( $K$ -Endomorphismen, 4 Punkte)

- (a) Sei  $L/K$  eine algebraische Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass jeder  $K$ -Endomorphismus  $\sigma : L \rightarrow L$  ein Isomorphismus ist.  
*Tipp: Betrachten Sie die Nullstellenmenge  $\text{NS}_f(L)$  für  $f \in K[X]$  geeignet.*  
(b) Finden Sie einen  $K$ -Endomorphismus  $\varphi : K(T) \rightarrow K(T)$  auf dem rationalen Funktionenkörper über  $K$ , der kein Isomorphismus ist.

#### Aufgabe 20. (Operation der Automorphismengruppe, 4 Punkte)

Sei  $f \in K[T]$  irreduzibel. Zeigen Sie, dass die Automorphismengruppe  $\text{Aut}_K(\overline{K})$  transitiv auf der Nullstellenmenge  $\text{NS}_f(\overline{K})$  operiert.

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **22. November 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17\\_16\\_WS\\_Algebra](https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra)