

2. Übungsblatt (erschienen am 02.11.2016)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)

Berechnen Sie die (distributionelle) Ableitung $u' \in \mathcal{D}'(-1, 1]$ von

$$u(x) := \begin{cases} -x^2/2 - x/6 + 1/3 & \text{für } x \in (-1, 0) \\ -x^2/4 - x/12 + 1/3 & \text{für } x \in (0, 1) \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass u die Differentialgleichung

$$-(k(x)u'(x))' = f(x) \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 0, u(1) = 0,$$

mit $f(x) := 1$ und

$$k(x) = 1 \quad \text{für } x \in (-1, 0), \quad k(x) = 2 \quad \text{für } x \in (0, 1)$$

löst.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)

Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.17 (Rechenregeln für die Ableitung) der Vorlesung.

Aufgabe 2.3 (Schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.13 der Vorlesung:

Ist $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\partial_i f = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, dann ist f lokal konstant, d.h. die Distribution f wird durch eine Funktion erzeugt, bei der für jeden Punkt $x \in \Omega$ eine Umgebung existiert, auf der die Funktion konstant ist.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Vergewissern Sie sich, dass es genügt zu zeigen, dass f auf jedem (n -dimensionalen) Intervall $I =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[\subset \Omega$ konstant ist.
- Zeigen Sie nun, dass

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(I) \text{ mit } \int_{a_i}^{b_i} \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_i = 0 \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\}.$$

- Verwenden Sie nun Funktionen $\psi_j \in \mathcal{D}(]a_j, b_j[)$, $j = 1, \dots, n$ mit $\int_{a_j}^{b_j} \psi_j(x_j) dx_j = 1$ um die Behauptung zu zeigen.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[3+2 Punkte]

In dieser Aufgabe geht es um das Erstellen und die Visualisieren einer Triangulierung eines Gebietes.

(a) Betrachten Sie ein beliebiges Rechteck $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$[P, T] = \text{gen_mesh}(a, b, c, d, m, n)$$

welche zu einem Rechteck, gegeben durch $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sowie $m, n \in \mathbb{N}$ eine Triangulierung des Rechteckes in $2nm$ viele, gleichgroße Dreiecke erzeugt, vergleiche Abbildung 1 für ein Beispiel. Dabei soll die Ausgabe $P \in \mathbb{R}^{(n+1)(m+1), 2}$ eine Matrix sein, welche in der i -ten Zeile die (x, y) -Koordinaten des i -ten Gitterpunktes enthält. $T \in \mathbb{R}^{2mn, 3}$ soll eine Matrix sein, welche in der j -ten Zeile die Indizes der drei, zum j -ten Dreieck gehörenden, Gitterpunkte enthält. Testen Sie ihre Funktion für verschiedene Rechtecke.



Abbildung 1: Beispielhafte Triangulierungen des Rechteckes $[0, 2] \times [0, 1]$ für $n = 4$ und $m = 2$.

(b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$\text{plot_mesh}(P, T)$$

welche zu einer durch P und T gegebenen Triangulierung (vergleiche Teilaufgabe (a)) das zugehörige Gitter zeichnet. Testen Sie ihre Funktion mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe (a). Testen Sie ihre Funktion außerdem mit dem Gitter, welches in der Datei `grid.mat` (siehe Homepage) enthalten ist.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 10.11.2016 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Übungsleiters im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Übungsleiter geschickt werden.
- Zu **Programmieraufgaben*** soll bis zum 10.11.2016 um 12:00 Uhr eine **kommentierte** Ausarbeitung in MATLAB-Code an ihren Übungsleiter geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**PDGL2_2016_Gruppennummer:**" (wenn Sie z.B. in Gruppe 2 sind, so soll die Betreffzeile mit "**PDGL2_2016_2:**" beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 2 werden in den Übungen zwischen dem 14.11.-17.11.2016 besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.