

Übungen zur Vorlesung Algebraische Geometrie I
Übungsblatt 6

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya

Übungen: M. Nickel

Übung 1 (Präsenz)

- (a) Zeige, dass man auf $\text{Spec}(A)$ eine Garbe \mathcal{O} erhält, indem man $\mathcal{O}(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subset \text{Spec}(A)$ definiert als die Menge aller $s : U \rightarrow \sqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ mit $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ und der Eigenschaft, dass für alle $\mathfrak{p} \in U$ eine Umgebung $U \supset V \ni \mathfrak{p}$ existiert, sodass für alle $\mathfrak{q} \in V$, $f \notin \mathfrak{q}$ und $s(\mathfrak{q}) = a/f$ in $A_{\mathfrak{q}}$.
- (b) Es gilt $\mathcal{O}(D(f)) \cong A_f$ für alle $f \in A$.
- (c) Insbesondere gilt $\Gamma(\text{Spec}(A), \mathcal{O}) \cong A$.

Übung 2 (Abgabe)

Sei A ein Ring und $(\text{Spec}(A), \mathcal{O})$ sein Spectrum. Zeige, dass für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ der Halm $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ der Garbe \mathcal{O} isomorph ist zum lokalen Ring $A_{\mathfrak{p}}$.

Übung 3 (Abgabe)

Seien \mathcal{F} und \mathcal{G} Garben abelscher Gruppen auf X . Zeige, dass für eine offene Menge $U \subset X$ die Menge $\text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ eine abelsche Gruppe ist. Zeige, dass die Prägarbe $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ eine Garbe ist. Sie wird Garbe der lokalen Homomorphismen von \mathcal{F} nach \mathcal{G} genannt, man schreibt auch $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Übung 4 (Abgabe)

Zeige: gegeben eine Prägarbe \mathcal{F} , existiert eine Garbe \mathcal{F}^+ und ein Morphismus $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ mit der Eigenschaft, dass für jede Garbe \mathcal{G} und jeden Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein eindeutiger Morphismus $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ existiert, sodass $\varphi = \psi \circ \theta$. Weiterhin ist das Paar (\mathcal{F}^+, θ) eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. \mathcal{F}^+ heißt die Garbe assoziiert zur Prägarbe \mathcal{F} .