Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016

Übungsblatt 6 22. November 2016

Aufgabe 21. (Gradbewertung auf $K(X)$, 4 Punkte)

Sei K ein Körper. Auf dem rationalen Funktionenkörper $K(T)$ über K definieren wir die **Gradbewertung** $v_\infty : K(T)^\times \to \mathbb{Z}$ durch

$$v_\infty\Big(\frac{f}{g}\Big) = \deg(g) - \deg(f) \quad \text{für} \quad f, g \in K[T].$$

(a) Zeigen Sie, dass v_∞ eine *wohldefinierte* diskrete Bewertung auf $K(T)$ ist.

(b) Beschreiben Sie die Bewertung auf $K(T)$, welche aus v_∞ durch Vorschalten des K-Automorphismus auf $K(T)$, der durch $T \mapsto T^{-1}$ gegeben ist, entsteht.

(c) Finden Sie einen Hauptidealring in $K(T)$, so dass die Gradbewertung eine zu einem Primelement gehörige diskrete Bewertung ist.

Aufgabe 22. (Irreduzibilität, 4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Polynome auf Irreduzibilität:

(a) $T^4 - 5T^2 + 10T - 15 \in \mathbb{Q}[T]$.

(b) $T^4 - T^2 - 1 \in \mathbb{Q}[T]$

(c) $XY + X + Y + 1 \in \mathbb{C}[X, Y]$.

(d) $X^4Y + Y^4 + X \in \mathbb{C}[X, Y]$.

Aufgabe 23. (Beispiel, 4 Punkte)

Es sei $\alpha := \sqrt{2 + \sqrt{2}} \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(T) := T^4 - 4T^2 + 2$ das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ ist, und bestimmen Sie alle komplexe Nullstellen von f.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ eine normale Körpererweiterung ist.

(c) Zeigen Sie, dass es genau ein $\sigma \in \mathrm{Aut}_\mathbb{Q}(\mathbb{Q}(\alpha))$ gibt mit $\sigma(\alpha) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, und bestimmen Sie die Bilder von jeder Nullstelle von f unter σ.

(d) Beschreiben Sie $\sigma|_{\mathrm{NS}_f(\mathbb{C})}$ als Permutation von den Nullstellen von f in Zykelschreibweise, und bestimmen Sie die Ordnung von σ.

— bitte wenden —

Aufgabe 24. (Faktorisierungsalgorithmus, 4 Punkte)

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der Faktorisierung von Polynomen über $\mathbb{Q}$. Sei dazu $f \in \mathbb{Q}[T]$ ein Polynom mit teilerfremden ganzzahligen Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie: Ist f reduzibel, so gibt es ein $g \in \mathbb{Z}[T]$ mit $1 \leq \deg(g) \leq \frac{1}{2}\deg(f)$, welches ein Teiler von f ist.

(b) Sei g wie in Teil (a) und $n \in \mathbb{Z}$. Welche Werte kann $g(n)$ höchstens haben?

(c) Folgern Sie, dass man damit f in endlich vielen Schritten faktorisieren (bzw. auf dessen (Ir)reduzibilität untersuchen) kann.

Tipp: Werten Sie f an hinreichend vielen ganzzahligen Stellen $n_0, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ aus. Nutzen Sie dann (b) und Lagrange-Interpolation, vgl. Numerikvorlesungen bzw. Aufgabe 28 aus der Vorlesung Lineare Algebra im WS 2015/16.

(d) Nutzen Sie diesen Algorithmus, um das Polynom

$$f(T) := T^5 - T^4 - 2T^3 + 2T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$$

zu faktorisieren.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **29. November 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`
