Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016

Übungsblatt 7 29. November 2016

Aufgabe 25. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Ferner sei $f = \frac{g}{h} \in K(T) \setminus K$ mit $g, h \in K[T]$ teilerfremd. Zeigen Sie:

(a) f ist transzendent über K.
(b) $K(T)/K(f)$ ist algebraisch und $[K(T) : K(f)] = \max\{\deg g, \deg h\}$.

Aufgabe 26. (Separable Polynome, 3 Punkte)

Untersuchen Sie, welche der folgenden Polynome separabel sind:

(a) $T^3 - T^2 + 1$ über $\mathbb{F}_3$.
(b) $T^4 + 2T^3 + 3T^2 + 2T + 1$ über $\mathbb{Q}$.
(c) $T^6 - a$ über einem beliebigen Körper K mit $a \in K$.

Aufgabe 27. (Artin-Schreier-Erweiterungen in Charakteristik p, 5 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $\overline{K}$ sein algebraischer Abschluss. Ferner sei $a \in K$, $f(T) := T^p - T - a \in K[T]$ und $\alpha \in \mathrm{NS}_f(\overline{K})$. Zeigen Sie:

(a) f ist separabel und $\mathrm{NS}_f(\overline{K}) = \{\alpha + c \mid c \in \mathbb{F}_p\}$.
(b) Das Minimalpolynom von jedem Element aus $\mathrm{NS}_f(\overline{K})$ hat den gleichen Grad.
(c) f ist genau dann irreduzibel, wenn es keine Nullstelle in K hat.
(d) $K(\alpha)/K$ ist eine normale Körpererweiterung.
(e) Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_K(K(\alpha))$, falls f irreduzibel ist.

Aufgabe 28. (Separabilität, 4 Punkte)

Sei E/K eine Körpererweiterung der Charakteristik $p > 0$ und $\alpha \in E$. Zeigen Sie:

$$K(\alpha) = K(\alpha^p) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \text{ ist algebraisch und separabel über } K.$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **06. Dezember 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`