Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016

Übungsblatt 8 06. Dezember 2016

Aufgabe 29. (inseparable Körpererweiterung, 4 Punkte)

Sei F ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Ferner sei $L := F(X, Y)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $F[X, Y]$ und $K := F(X^p, Y^p) \subseteq L$. Zeigen Sie:

(a) $[L : K] = p^2$ und $[L : K]_s = 1$.

(b) L/K ist nicht einfach.

(c) L/K hat unendlich viele Zwischenkörper.

Aufgabe 30. (endliche Körper, 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_3[T]/(T^2 + 1)$ und $\mathbb{F}_3[T]/(T^2 + T - 1)$ als Algebren über $\mathbb{F}_3$ isomorph sind. Geben Sie dazu einen Isomorphismus explizit an.

(b) Finden Sie einen Erzeuger von $\mathbb{F}_9^\times$ sowie ein Element von $\mathbb{F}_9$, der ein primitives Element für die Körpererweiterung $\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3$, aber kein Erzeuger von $\mathbb{F}_9^\times$ ist.

Aufgabe 31. (Reduktion modulo Primzahl, 4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Ist q eine *ungerade* Primzahlpotenz, so ist das Produkt zweier Nicht-Quadrate in $\mathbb{F}_q^\times$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_q^\times$.

(b) Ist p eine beliebige Primzahl, so ist $T^4 + 1 \in \mathbb{F}_p[T]$ ein Produkt von zwei (nicht notwendig irreduziblen) Polynomen über $\mathbb{F}_p$ vom Grad 2.

Tipp: Überlegen Sie sich für $p > 2$ zunächst, dass mindestens ein $x \in \{-1, 2, -2\}$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_p^\times$ sein muss. Unterscheiden Sie dann drei Fälle.

(c) Das Polynom $T^4 + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 32. (Galoiserweiterungen, 4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist L/K eine endliche normale Körpererweiterung und $G := \mathrm{Aut}_K(L)$, so ist die Körpererweiterung L/L^G ist galoissch und

$$[L : L^G] = [L : K]_s.$$

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **13. Dezember 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`