Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016

Übungsblatt 9 13. Dezember 2016

Aufgabe 33. (Verschiebungssatz, 4 Punkte)

Sei Ω/K eine Körpererweiterung, L/K ein endlicher Zwischenkörper und E ein weiterer beliebiger Zwischenkörper. Ferner sei $F := EL$ das Kompositum von E und L in Ω.

(a) Zeigen Sie unter der Voraussetzung, dass L/K galoissch ist, folgende Aussagen:

(i) F/E ist ebenfalls endlich galoissch.

(ii) Die Einschränkung

$$\mathrm{res}^F_L : \mathrm{Gal}(F/E) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K), \quad \sigma \longmapsto \sigma|_L.$$

definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus. Was ist das Bild von res^F_L und der zugehörige Zwischenkörper?

(iii) $[F : E]$ ist ein Teiler von $[L : K]$.

(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel zu (a)(iii), wenn L/K nicht galoissch ist.

Aufgabe 34. (Polynom mit abelscher Galoisgruppe, 4 Punkte)

Sei f ein separables und irreduzibles Polynom über einem Körper K. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathrm{Gal}(f)$ abelsch, so ist $\#\,\mathrm{Gal}(f) = \deg(f)$.

(b) Es gibt ein solches f über $\mathbb{Q}$ mit abelscher, aber nicht zyklischer Galoisgruppe.

Aufgabe 35. (Beispiel I, 4 Punkte)

Es sei $f := T^6 + 3 \in \mathbb{Q}[T]$ und $\zeta := \mathrm{e}^{\frac{\pi\,\mathrm{i}}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $L := \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}\,\mathrm{i}) \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist, und bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$.

(b) Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ gegeben durch $\sigma(\sqrt[6]{3}\,\mathrm{i}) = \zeta \cdot \sqrt[6]{3}\,\mathrm{i}$ (warum existiert genau ein solches σ?). Beschreiben Sie σ als Permutation der Nullstellen von f in L.

Tipp: Bestimmen Sie zunächst $\sigma(\zeta)$.

(c) Bestimmen Sie die Struktur der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.

Anmerkung: Insbesondere zeigt dieses Beispiel, dass die Umkehrung der Aufgabe 34(a) *falsch ist.*

(d) Geben Sie das Untergruppediagramm von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sowie das entsprechende Zwischenkörperdiagramm an.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 36. (Beispiel II, 4 Punkte)

Es sei $\alpha := \sqrt{1+\sqrt{3}} \in \mathbb{C}$ und $K := \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $P_{\alpha/\mathbb{Q}}$ sowie dessen komplexe Nullstellen.

(b) Bestimmen Sie die normale Hülle L von $K/\mathbb{Q}$.

(c) Was ist die Galoisgruppe von $L/\mathbb{Q}$? Geben Sie die Struktur dieser Gruppe an.
Tipp: Versuchen Sie zunächst, ein paar Automorphismen von L über $\mathbb{Q}$ als Permutation der Nullstellen von $P_{\alpha/\mathbb{Q}}$ zu beschreiben.

(d) Geben Sie das Untergruppediagramm von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sowie das entsprechende Zwischenkörperdiagramm an.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **20. Dezember 2016**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`