

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien M, N Mengen und $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.

- (a) Zeigen Sie: $x \sim y : \iff f(x) = f(y)$ ist eine Äquivalenzrelation auf M .
- (b) Wir setzen $M/\sim := \{K_x \mid x \in M\}$.
Zeigen Sie: Die Abbildung $\tilde{f}: M/\sim \rightarrow N, K_x \mapsto f(x)$ ist wohldefiniert und injektiv.
- (c) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Geben Sie ein Vertretersystem von \mathbb{R}/\sim an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

- (a) Zeigen Sie: $v \sim w : \iff v - w \in U$ ist eine Äquivalenzrelation auf V .
- (b) Wir schreiben $[v] := K_v = \{w \in V \mid w \sim v\}$ für die Äquivalenzklasse von $v \in V$ und nennen die Menge der Äquivalenzklassen $V/U := \{[v] \mid v \in V\}$ den *Faktorraum*.

Zeigen Sie: V/U wird durch

$$[v] + [w] := [v + w] \quad \text{und} \quad \lambda \cdot [v] := [\lambda v]$$

für $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ zu einem K -Vektorraum.

- (c) Zeigen Sie: $\pi: V \rightarrow V/U, v \mapsto [v]$ ist linear und geben Sie Kern π an.
- (d) Sei nun $\dim V = n$.

Zeigen Sie: $\dim V = \dim U + \dim V/U$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der Telefonmatrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ * & 0 & \# \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $*$ und $\#$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Anna und Ella wollen Weihnachtsplätzchen backen. Sie haben 3 Rezepte für verschiedene Plätzchen. Für das erste Rezept benötigt man 100g Zucker, 250g Butter und 250g Mehl. Für das zweite Rezept benötigt man 125g Zucker, 125g Butter und 250g Mehl und für das dritte Rezept sind es 50g Zucker, 100g Butter und 250g Mehl. Anna und Ella stellen fest, dass sie nur noch 1 Pfund Zucker, 2 Pfund Butter und 3 Pfund Mehl im Haus haben.

Wie viel müssen sie von den jeweiligen Rezepten backen, um ihre kompletten Vorräte an Zucker, Butter und Mehl zu verbrauchen?

Bemerkung: Für alle, die kein Pfund mehr kennen: 1 Pfund = 500g.

Abgabe bis 10:00 am Montag, den 9. Januar in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.