Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016

Übungsblatt 10 20. Dezember 2016

Aufgabe 37. (duale Basis bzgl. Spurform, 4 Punkte)

Sei L/K eine separable Körpererweiterung vom Grad $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in L$ ein primitives Element mit dem Minimalpolynom $f = P_{\alpha/K} \in K[T]$. Ferner seien $\beta_i \in L$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ gegeben durch

$$\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i T^i = \frac{f(T)}{T-\alpha} \in L[T].$$

Zeigen Sie, dass $(\beta_i / f'(\alpha))_{i=0,\ldots,n-1}$ die duale Basis von $(\alpha^i)_{i=0,\ldots,n-1}$ bzgl. der Spurform ist.

Tipp: Definieren Sie die Spur $\mathrm{tr}_{L/K}(f) \in K[T]$ *für* $f \in L[T]$ *und bestimmen Sie*

$$\mathrm{tr}_{L/K}\left(\frac{\alpha^i}{f'(\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j X^j \right)$$

für $i = 0, \ldots, n-1$*, indem Sie dieses Polynom an allen Nullstellen von* f *in einer normalen Hülle von* L/K *auswerten.*

Aufgabe 38. (Normen, 4 Punkte)

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie:

(a) Ist $\alpha \in L$ ein primitives Element von L/K, so ist $N_{L/K}(x - \alpha) = P_{\alpha/K}(x)$ für alle $x \in K$.

(b) Sind L und K endlich, so ist $N_{L/K} : L^\times \to K^\times$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

(c) Die Aussage in (b) ist falsch für die Erweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

Aufgabe 39. (Gruppenerweiterungen, 4 Punkte)

Unter einer *Gruppenerweiterung*[1] einer Gruppe H durch eine Gruppe N versteht man eine *kurze exakte Sequenz*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$$

also eine Folge von Gruppenhomomorphismen wie im obigen Diagramm mit ι injektiv, π surjektiv und $\operatorname{im} \iota = \ker \pi$. Man sagt, dass eine solche Erweiterung *zerfällt* oder *spaltet*, wenn es einen Gruppenhomomorphismus $s : H \to G$ gibt, genannt *Schnitt*, so dass $\pi \circ s = \mathrm{id}_H$.

(a) Zeigen Sie: Ist L/K eine endliche galoissche Körpererweiterung und L'/K eine galoissche Zwischenkörper, so liefern die Inklusion $\mathrm{Gal}(L/L') \to \mathrm{Gal}(L/K)$ und die Restriktion $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(L'/K)$ eine Gruppenerweiterung

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/L') \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L'/K) \longrightarrow 1.$$

—— **bitte wenden** ——

[1] Vorsicht! Die Bezeichnung ist nicht einheitlich. Manche reden hier von einer Gruppenerweiterung von N durch H.

(b) Zeigen Sie, dass es sich jeweils im folgenden um eine Gruppenerweiterung handelt, und untersuchen Sie, ob sie zerfällt:

(i) $1 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\text{inkl}} S_n \xrightarrow{\text{sign}} \{\pm 1\} \longrightarrow 1$.

(ii) $1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$ mit $\pi(a+4\mathbb{Z}) = a + 2\mathbb{Z}$ für $a + 4\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Aufgabe 40. (semidirekte Produkte, 4 Punkte)

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit einer speziellen Klassen von Gruppenerweiterungen, nämlich semidirekten Produkten.

(a) Seien H, N zwei Gruppen, $\mathrm{Aut}(N)$ die Automorphismengruppe der Gruppe N und $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass das kartesisches Produkt $N \times H$, zusammen mit der durch

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1 \cdot \varphi(h_1)(n_2), h_1 \cdot h_2) \quad \text{für } n_1, n_2 \in N,\ h_1, h_2 \in H$$

definierten Verknüpfung, eine Gruppe bildet. Diese Gruppe heißt das *semidirekte Produkt* von N mit H bzgl. φ und wird mit $N \rtimes_\varphi H$ bezeichnet.

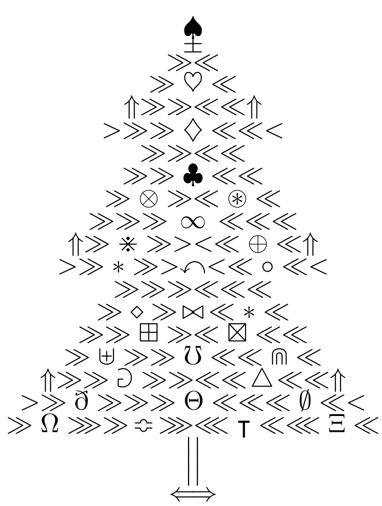
(b) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G genau dann isomorph zum semidirekten Produkt einer Gruppe N mit einer Gruppe H ist, wenn G eine Gruppenerweiterung von H nach N im Sinne der Aufgabe 39 mit einem Schnitt $s : H \to G$ ist.

(c) Sei G eine Gruppe mit einer Untergruppe H und einem Normalteiler N derart, dass $N \cap H = \{1\}$ und sich jedes Element aus G als Produkt nh mit $n \in N$, $h \in H$ schreiben lässt. Zeigen Sie: $G \simeq N \rtimes_\varphi H$ für ein geeignetes $\varphi \in \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Aut}(N))$.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ gegeben durch $\varphi(a)(b) := ab$ für $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ und $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,\ b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}$$

ist eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, die zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ isomorph ist.



—— **Ein frohes Weihnachtsfest und alles Gute im neuen Jahr!** ——

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **10. Januar 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`