

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)

- (a) Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus.

Zeigen Sie: f ist injektiv $\iff f$ ist surjektiv $\iff f$ ist bijektiv.

- (b) Gegeben sei ein Endomorphismus Φ von \mathbb{C}^3 , der in der Standardbasis durch die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ -1 & 1 & -i \\ 1+i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie, ob Φ invertierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

- (a) Sei K ein Körper der Charakteristik p und sei $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow K$ der eindeutige Ringhomomorphismus.

Bestimmen Sie Kern φ .

- (b) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sagen wir a teilt b und schreiben $a \mid b$, falls $\exists k \in \mathbb{Z} : ak = b$. Wir sagen $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ ist eine *Primzahl*, falls $\forall a, b \in \mathbb{Z} : (p \mid ab \implies p \mid a \text{ oder } p \mid b)$.

Zeigen Sie: Ist K ein Körper der Charakteristik p , so ist $p = 0$ oder p ist eine Primzahl.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

- B die Menge der Bilinearformen,
- A die Menge der alternierenden Bilinearformen,
- S die Menge der symmetrischen Bilinearformen.

auf V . Zeigen Sie:

- (a) B ist ein Untervektorraum von $\text{Abb}(V \times V, K)$ und A, S sind Unterräume von B ;
(b) $B = A \oplus S$, falls die Charakteristik von K ungleich 2 ist;
(c) $A \subseteq S$, falls die Charakteristik von K gleich 2 ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit Charakteristik ungleich 2.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\beta: K^n \times K^n \rightarrow K, \quad (x, y) \mapsto \beta(x, y) := x^T y$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\Phi: \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (x, y) \mapsto \Phi(x, y) := x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} y$$

eine alternierende Bilinearform auf \mathbb{Q}^3 ist. Ist Φ symmetrisch?

(c) Sei $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\Phi: K^n \times K^n \rightarrow K, \quad (x, y) \mapsto \Phi(x, y) := x^T A y$$

genau dann eine alternierende Bilinearform ist, wenn $A + A^T = 0$.

Abgabe bis 10:00 am Montag, den 16. Januar in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.