Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 12 17. Januar 2017

Aufgabe 45. (Gruppen der Ordnung p^2, 4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und p eine Primzahl.

(a) Zeigen Sie: Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

(b) Folgern Sie: Hat G die Ordnung p^2, so ist G abelsch.

(c) Wie viele Isomorphieklassen der Gruppen der Ordnung p^2 gibt es? Geben Sie alle bis auf Isomorphie verschiedenen Gruppen der Ordnung p^2 an.

Aufgabe 46. (Anwendung der Sylowsätze II, 4 Punkte)

(a) Sei G eine Gruppe und seien $N, M \lhd G$ Normalteiler derart, dass $N \cap M = \{1\}$. Zeigen Sie, dass die Untergruppe $NM \subseteq G$ zum direkten Produkt $N \times M$ isomorph ist. Was kann man über die Ordnung von NM sagen?

(b) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $1225 = 5^2 \cdot 7^2$ abelsch ist.

(c) Geben Sie alle bis auf Isomorphie verschiedenen Gruppen der Ordnung 1225 an.

Aufgabe 47. (einfache Gruppe der Ordnung 60, 4 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die alternierende Gruppe A_5 die einzige einfache Gruppe der Ordnung 60 ist. Im folgenden sei also G eine einfache Gruppe der Ordnung 60. Zeigen Sie:

(a) Für $p \in \{2, 3, 5\}$ ist die Anzahl $a_p(G)$ der p-Sylowgruppen mindestens 5.
Tipp: Betrachten Sie den durch die Operation von G auf der Menge $\mathrm{Syl}_p(G)$ der p-Sylowgruppen durch Konjugation definierten Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Syl}_p(G)).$$

(b) G besitzt eine Untergruppe H vom Index $(G : H) = 5$.
Tipp: Zeigen Sie unter der Annahme des Gegenteils, dass je zwei verschiedene 2-Sylowgruppen $P, Q \subseteq G$ trivialen Durchschnitt haben, indem Sie das Erzeugnis $\langle P \cup Q \rangle \subseteq G$ betrachten. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(c) Die Operation von G auf den Nebenklassen von H aus Teil (b) liefert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \to S_5$, der G mit A_5 identifiziert.

— bitte wenden —

Aufgabe 48. (Kompositionsreihen, 4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine Kompositionsreihe und die Faktoren für folgende Gruppen:

(a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für beliebige natürliche Zahl $n \geq 2$.

(b) die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.
Tipp: Die Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ *auf* $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ *mittels Möbiustransformation liefert einen Gruppenhomomorphismus* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \to S_4$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **24. Januar 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`
