

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Koeffizienten von X^3 und den konstanten Term in CharPoly_A für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie zudem die Eigenräume und -werte von A .

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Rang, die Eigenwerte und Eigenräume und zuletzt das charakteristische Polynom der Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Sei V ein K -Vektorraum, $f \in \text{End}(V)$ und $\lambda, \lambda' \in K$. Dann haben verschiedene Eigenräume von f trivialen Schnitt: für $\lambda \neq \lambda'$ ist $E_\lambda \cap E_{\lambda'} = \{0\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper. Wir erinnern an den Endomorphismus

$$\frac{d}{dx}: K[x] \rightarrow K[x], \quad x^n \mapsto nx^{n-1}.$$

Zeigen Sie:

$$f, \frac{d}{dx}f \in \text{Kern } ev_p \iff (X - p)^2 \mid f.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die *Leibniz-Regel*:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{d}{dx}(f)g + f\frac{d}{dx}(g).$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $(x - 1) \mid (x^n - 1)$ und berechnen Sie

$$\frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

- (a) Sei V ein K -Vektorraum. Eine Abbildung $f \in \text{End}(V)$ heißt Projektion, falls $f \circ f = f$ gilt. Welche $\lambda \in K$ können als Eigenwerte einer Projektion vorkommen?
- (b) Zeigen Sie, dass eine Matrix und ihre Transponierte die selben Eigenwerte haben. Gilt dies auch für die Eigenvektoren?

Abgabe bis 10:00 am Montag, den 30. Januar in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.