Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 13 24. Januar 2017

Aufgabe 49. (Normalteiler von S_n, 3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 1, 2, 4$. Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_n der einzige nichttriviale Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_n ist.

Aufgabe 50. (auflösbare Gruppen, 4 Punkte)

Seien p, q, r paarweise verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie:

(a) Jede Gruppe der Ordnung $p^2 q$ ist auflösbar.
(b) Jede Gruppe der Ordnung pqr ist auflösbar.

Tipp: Finden Sie zunächst mithilfe der Sylowsätze einen nichttrivialen Normalteiler.

Aufgabe 51. (Galoistheorie, 6 Punkte)

Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung mit der Galoisgruppe G. Zeigen Sie:

(a) Ist M ein Zwischenkörper von L/K, so ist die normale Hülle von M gleich L^H, wobei
$$H := \bigcap_{\sigma \in G} \sigma \operatorname{Gal}(L/M) \sigma^{-1} \subseteq G.$$
(b) Ist $\alpha \in L$ und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so gilt:
$$L^H = K(\alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad H = \{\sigma \in G \mid \sigma(\alpha) = \alpha\}.$$
(c) Sind L_1 und L_2 Zwischenkörper von L/K, die über K galoissch sind, so ist es auch $L_1 L_2 / K$ und es gilt:
$$\operatorname{Gal}(L_1 L_2 / L_1 \cap L_2) \cong \operatorname{Gal}(L_1 / L_1 \cap L_2) \times \operatorname{Gal}(L_2 / L_1 \cap L_2).$$

Aufgabe 52. (Anwendung der Galoiskorrespondenz, 3 Punkte)

Es bezeichne $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ eine primitive 5-te Einheitswurzel.

(a) Zeigen Sie: dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ genau einen Zwischenkörper L mit $[L : \mathbb{Q}] = 2$ besitzt.
(b) Finden Sie ein $d \in \mathbb{Z}$, so dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ gilt.
(c) Folgern Sie, dass $\mathrm{i} \notin \mathbb{Q}(\zeta_5)$ gilt.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **31. Januar 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`