Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Nithi Rungtanapirom

Algebra

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 14 31. Januar 2017

Aufgabe 53. (zyklische Erweiterung, 4 Punkte)

Sei K ein Körper, n eine natürliche Zahl mit $\operatorname{char} K \nmid n$ und $\mu_n \subseteq K$. Ferner sei L/K eine zyklische Galoiserweiterung vom Grad n und $\alpha \in L$, so dass $L = K(\alpha)$ und $a := \alpha^n \in K$.

(a) Sei $b \in K^\times$. Zeigen Sie: Es gibt genau dann ein $\beta \in L$ mit $\beta^n = b$, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass b/a^r eine n-te Potenz in K ist.

(b) Seien die äquivalenten Bedingungen in (a) erfüllt. Finden Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an r dafür, dass $L = K(\beta)$ gilt.

Tipp: Sei $\beta \in L$ mit $\beta^n = b$ und $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Wie kann $\sigma(\beta)$ aussehen?

Aufgabe 54. (symmetrische Polynome, 4 Punkte)

Schreiben Sie folgende Polynome als Polynome in den elementarsymmetrischen Polynomen:

(a) $T_1^3T_2 + T_1^3T_3 + T_2^3T_1 + T_2^3T_3 + T_3^3T_1 + T_3^3T_2 \in \mathbb{Z}[T_1, T_2, T_3]$.

(b) $(T_1 + T_2 + T_3)(T_1 + T_2 + T_4)(T_1 + T_3 + T_4)(T_2 + T_3 + T_4) \in \mathbb{Z}[T_1, T_2, T_3, T_4]$.

Aufgabe 55. (Lösungsformel für Polynome dritten Grades, 5 Punkte)

Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2, 3$ und $\bar{K}$ sein algebraischer Abschluss. Ferner sei $f \in K[T]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3, $L \subseteq \bar{K}$ der Zerfällungskörper von f über K und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in L$ die Nullstellen von f. Durch geeignete lineare Substitution können wir o.B.d.A. annehmen, dass $f(T) = T^3 + pT + q$ für geeignete $p, q \in K$ ist.

(a) Wie kann $\mathrm{Gal}(f)$ als Untergruppe von S_3 aussehen? Begründen Sie Ihre Antworten!

(b) Es sei $\delta := (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3) \in L$. Zeigen Sie:

  (i) $\delta^2 = -4p^3 - 27q^2 \in K$.

  (ii) $\delta \in K \iff \mathrm{Gal}(f) \cong A_3$.

  Gilt die Gleichheit $[L : K(\delta)] = 3$ immer? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Sei $\zeta \in \bar{K}$ eine primitive dritte Einheitswurzel. Zeigen Sie, dass $L(\zeta)/K(\delta, \zeta)$ eine zyklische Galoiserweiterung vom Grad 3 ist.

—— **bitte wenden** ——

(d) Im Hinblick auf die Lagrange-Resolventen aus der Theorie der zyklischen Erweiterungen definieren wir folgende Ausdrücke:

$$A := \alpha_1 + \zeta\alpha_2 + \zeta^2\alpha_3,$$
$$B := \alpha_1 + \zeta^2\alpha_2 + \zeta\alpha_3.$$

Vereinfachen Sie unter der Berücksichtigung von $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ folgende Terme:

$$A + B,\ \zeta A + \zeta^2 B,\ \zeta^2 A + \zeta B.$$

Drücken Sie anschließend damit $A^3 + B^3$ und AB in Termen von p, q aus.

(e) Berechnen Sie A^3, B^3 und leiten Sie daraus eine Lösungsformel für $f(T) = 0$ her.

Aufgabe 56. (Polynome dritten Grades, 3 Punkte)

Bestimmen Sie die Galoisgruppe von $f(T) := T^3 - 3T^2 + 9T - 9$ über $\mathbb{Q}$ sowie deren Nullstellen in $\bar{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **07. Februar 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/63137772/17_16_WS_Algebra`