Aufgabe 1. *Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ die folgende Gleichung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}$$

gilt.

Aufgabe 2. *Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die nicht konstant ist. Zeigen sie, dass das Bild dicht in $\mathbb{C}$ liegt.*

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(z) := \frac{1}{f(z)-a}$ für ein geeignetes $a \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3. *Betrachten Sie die Funktion* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{\sin z}{z^2}$.

(a) Welche Singularitäten hat die Funktion f*? Geben Sie zu jeder Singularität an, ob diese hebbar, ein Pol oder wesentlich ist.*

(b) Berechnen Sie das Residuum von f *an den entsprechenden Singularitäten.*

Aufgabe 4. *Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung*

$$y' = \quad (-x - y + 2)^2 \quad \text{mit Anfangswert } y(0) = 1.$$