Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2016/17
2, Februar 2017

Funktionentheorie und DGL
Prof. Dr. Annette Werner
Dr. Alejandro Soto

Übungsblatt 6 - Teil B

Aufgabe 1. *Sei $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Es gelte*

$$f(-x,y) = -f(x,y), \qquad \text{für alle } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein offenes Interval, das 0 enthält und $\varphi\colon I\to\mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x,y).$$

Zeigen Sie, dass es ein $r>0$ gibt, so dass $[-r,r]\subset I$ und $\varphi|_{[-r,r]}$ gerade ist, das heißt für alle $x\in[-r,r]$ gilt $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Lösung. Sei $\varphi\colon I\to\mathbb{R}$ eine Lösung, i.e. $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$. Dann wählen wir $r>0$, so dass f einer Lipschitz-Bedingung auf $[-r,r]\times[-r,r]$ genügt. Nun definieren wir $\varphi_2\colon[-r,r]\to\mathbb{R}$ als $\varphi_2(x):=\varphi(-x)$. Da

$$\varphi_2'(x) = -\varphi'(-x) = -f(-x,\varphi(-x)) = f(x,,\varphi_2(x))$$

ist auch φ_2 eine Lösung der Differentialgleichung auch. Da $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$, folgt nach dem Eindeutigkeitsatz, dass $\varphi_2=\varphi_1$.

Aufgabe 2. *Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die in $I\times\mathbb{R}^n$ global einer Lipschitz-Bedingung mit Konstanten $L\in\mathbb{R}_{>0}$ genügt. Weiter seien $\varphi,\psi\colon I\to\mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y'=f(x,y)$. Sei $a\in I$ und $\delta:=||\varphi(a)-\psi(a)||$. Zeigen Sie, dass*

$$||\varphi(x)-\psi(x)|| \le \delta e^{x|x-a|} \qquad \text{für alle } x\in I.$$

Hinweis: Benutzen Sie das Picard–Lindelöfsche Iterationsverfahren für φ und ψ und zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$||\varphi_n(x)-\psi_n(x)|| \le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{L|x-a|}{k!}\right)^k, \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}$$

gilt.

Abgabe bis **12 Uhr** am **Donnerstag, den 2. Februar** in die entsprechenden Kästen im 3. Stock der Robert-Mayer-Straße 6.

Lösung. Nach dem Eindeutigkeitsatz sind die Lösungen durch das Picard–Lindelöf-verfahren gegeben:

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n, \text{ mit } \varphi_n(x) := \varphi(a) + \int_a^x f(t, \varphi_n(t))dt$$
$$\psi = \lim_{n\to\infty} \psi_n, \text{ mit } \psi_n(x) := \psi(a) + \int_a^x f(t, \psi_n(t))dt$$

Wir können annehmen, dass $\varphi(a) \neq \psi(a)$, sonst folgt nach Eindeutigkeit der Lösung, dass $\varphi = \psi$. Für $n = 0$ haben wir, dass $||\varphi(a) - \psi(a)|| = \delta$. Nun sagt der Induktionsschritt, dass

$$\begin{aligned}
||\varphi_{n+1}(x) - \psi_{n+1}(x)|| &\leq \delta + \left|\left| \int_a^x f(t, \varphi_n(x)) - f(t, \psi_n(x))dt \right|\right| \\
&\leq \delta + \int_a^x ||f(t, \varphi_n(x)) - f(t, \psi_n(x))||\, dt \\
&\leq \delta + \int_a^x L\, ||\varphi_n(x) - \psi_n(x)||\, dt \\
&\leq \delta + \int_a^x L\delta \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{L|x-a|}{k!}\right)^k dt \\
&\leq \delta \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{L|x-a|}{k!}\right)^k .
\end{aligned}$$

Nun nehmen wir den Limes $n \to \infty$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
||\varphi(x) - \psi(x)|| = ||\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) - \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)|| &= \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n(x) - \psi_n(x)|| \\
\leq \delta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{L|x-a|}{k!}\right)^k &= \delta e^{L|x-a|}
\end{aligned}$$