

## Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2017

### Übungsblatt 1

24. April 2017

#### Aufgabe 1. (Teilbarkeit in ganzen Zahlen)

Es seien  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie:

- (a)  $6 \mid (n^3 - n)$ .
- (b)  $7 \mid (10m + n) \iff 7 \mid (m - 2n)$ .
- (c) Ist  $n$  ungerade, so ist  $8 \mid (n^2 - 1)$ .

#### Aufgabe 2. (Euklidischer Algorithmus 1)

- (a) Lösen Sie die lineare Diophantische Gleichung  $1604x + 2015y = 11$ .
- (b) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler  $d$  von 420, 315 und 234 und finden Sie  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ , so dass gilt:

$$420x + 315y + 234z = d.$$

#### Aufgabe 3. (Euklidischer Algorithmus 2)

Die *Fibonacci-Folge*  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, a_2 := 1 \text{ und } a_{n+2} := a_{n+1} + a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass  $\text{ggT}(a_{n+1}, a_n) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

Wie viele Divisionen mit Rest benötigt der euklidische Algorithmus für  $\text{ggT}(a_{n+1}, a_n) = 1$ ?

#### Aufgabe 4. ( $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ )

Die Menge der Matrizen der Form  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  und  $\det(A) = 1$  bildet mit Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die Untergruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  von  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ .

- (a) Bestimmen Sie eine Formel für das Inverse zu  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ .
- (b) Seien  $a, c \in \mathbb{Z}$  beliebig. Zeigen Sie, dass es  $b, d \in \mathbb{Z}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

genau dann gibt, wenn  $a$  und  $c$  teilerfremd sind.

- (c) Zeigen Sie, dass die Matrizen  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  die Gruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  erzeugen.

*Tipp:* Berechnen Sie zuerst  $S^n$  und  $T^n$  für  $n \in \mathbb{Z}$ . Nehmen Sie dann eine beliebige Matrix  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  und multiplizieren wahlweise  $S$  oder  $T$  von links dazu. Was haben elementare Zeilenoperationen mit dem euklidischen Algorithmus zu tun?

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **2. Mai 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[http://www.uni-frankfurt.de/65113368/17\\_SS\\_Elementare-Zahlentheorie](http://www.uni-frankfurt.de/65113368/17_SS_Elementare-Zahlentheorie)