

## Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2017

### Übungsblatt 2

2. Mai 2017

#### Aufgabe 5. (IMO 1959, Aufgabe 1)

Zeigen Sie, daß der Bruch

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  bereits vollständig gekürzt ist.

#### Aufgabe 6. (Teilbarkeitsregeln)

Entwickeln Sie eine Teilbarkeitsregel für natürliche Zahlen mittels ihrer Ziffern in der Darstellung im 10-er System für die Teilbarkeit durch

- (a) 37,
- (b) 41,
- (c) 73,
- (d) 137.

#### Aufgabe 7. (EAN-Code)

Der EAN-Code (Strichcode) arbeitet mit 13 Ziffern  $a = (a_1, \dots, a_{13})$  aus  $\{0, 1, \dots, 9\}$ . Gültige Code-Wörter erfüllen die Prüfbedingung

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \dots + 3a_{12} + a_{13} \equiv 0 \pmod{10}$$

- (a) Zeigen Sie, daß ein Codewort, bei dem eine Ziffer unleserlich ist, auf genau eine Weise zu einem gültigen Codewort ergänzt werden kann, und zwar egal an welcher Stelle die Ziffer unleserlich ist.
- (b) Welche (typischen menschlichen) Fehler bei der Übermittlung von Codewörtern lassen sich bemerken?

#### Aufgabe 8. (Primzahlen)

- (a) Benutzen Sie das Sieb des Eratosthenes, um alle Primzahlen bis 400 zu bestimmen.
- (b) Wieviele Primzahlen gibt es bis 100, von 100 bis 200, von 200 bis 300 und von 300 bis 400?
- (c) Wieviele Primzahlzwillinge gibt es bis 400?
- (d) Wie verteilen sich die Primzahlen  $\leq 400$  auf die Kongruenzklassen modulo 10?
- (e) Beweisen Sie von Hand, daß 2017 eine Primzahl ist.

**Aufgabe 9.** (Quadratzahlen)

Eine Quadratzahl ist eine ganze Zahl, die ein Quadrat einer ganzen Zahl ist, also eine Zahl der Form  $n^2$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ .

- (a) Beweisen Sie, daß eine Quadratzahl im Zehnersystem stets auf die Endziffer 0, 1, 4, 5, 6, oder 9 endet.
- (b) Wie sieht das im 8-er System aus?
- (c) Gibt es einen Modulus  $m > 2$ , so daß jede ganze Zahl  $n \in \mathbb{Z}$  kongruent zu einer Quadratzahl modulo  $m$  ist?

**Aufgabe 10.** (Chamäleons)

Auf einer Insel des Staates Sikinien leben 12 rote, 13 grüne und 14 gelbe Chamäleons. Diese begegnen sich ab und zu, aber immer nur zu zweit. Wenn zwei Chamäleons sich treffen, dann ändern sie vor Schreck die Farbe, und zwar nach der folgenden festen Regel:

- Haben die Chamäleons die gleiche Farbe, so wechseln sie jeweils in eine der beiden anderen Farben, so daß sie nach dem Treffen zwei verschiedene Farben haben; etwa werden aus zwei roten Chamäleons ein grünes und ein gelbes.
- Haben die Chamäleons verschiedene Farben, so wechseln sie in die dritte Farbe, so daß sie beide die gleiche aber für sie jeweils neue Farbe haben; etwa werden aus einem roten und einem gelben Chamäleon zwei grüne.

Kann es zu einem Zeitpunkt vorkommen, daß alle Chamäleons auf der Insel die gleiche Farbe haben?

---

**Abgabe:** Am kommenden Montag, den **8. Mai 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[http://www.uni-frankfurt.de/65113368/17\\_SS\\_Elementare-Zahlentheorie](http://www.uni-frankfurt.de/65113368/17_SS_Elementare-Zahlentheorie)

---