Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2017

Übungsblatt 3 8. Mai 2017

Aufgabe 11.

(a) Beweisen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Zahl $n^7 - n$ durch 42 teilbar ist.

(b) Bestimmen Sie die Einerziffer im Zehnersystem von 3^{400}.

Aufgabe 12. (IMO 1975, Aufgabe 4)

Wir betrachten die Zahl $N = 4444^{4444}$. Sei A die Quersumme von N zur Basis 10. Sei B die Quersumme von A zur Basis 10. Bestimmen Sie die Quersumme C von B zur Basis 10.

Aufgabe 13.

Es sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: $2^{4n+1} + 3^{3n+2} \equiv 0 \pmod{11}$.

(b) Zeigen Sie: $7^n \equiv 18n^2 - 12n + 1 \pmod{27}$.

Aufgabe 14. (Zahlentheorie im Kartenspiel)

Ein Satz Spielkarten besteht aus 52 Karten. Um sie zu mischen, wird der Kartenstapel zunächst halbiert. Die obere Hälfte geht in die linke Hand und die untere in die rechte. Danach werden die Karten, von der linken Seite beginnend, abwechselnd von den beiden Händen losgelassen (d.h. zuerst die unterste Karte von der linken Hand, dann die von der rechten Hand, dann die zweit-unterste von der linken Hand usw.), so dass sie gleichmäßig ineinander verzahnen. Nummeriert man also die Karten mit $1, 2, 3, \ldots, 52$, so lautet die Reihenfolge der Karten nach der Mischung

$$27, 1, 28, 2, \ldots, 51, 25, 52, 26.$$

Mit anderen Worten: Ist $f(n)$ die Position der n-ten Karte nach der Mischung, so ist

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{falls } n \leq 26, \\ 2(n-26) - 1, & \text{falls } n > 26. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: nach geeigneter Anzahl $N > 0$ von Wiederholungen dieses Prozesses sind die Karten wieder genau in der ursprünglichen Reihenfolge.

(b) Bestimmen Sie, ob es möglich ist, durch geeignete Anzahl von Wiederholungen dieses Prozesses den Kartenstapel in der genau umgekehrten Reihenfolge zu bekommen.

Hinweis: Rechnen Sie modulo 53.

—— bitte wenden ——

Aufgabe 15. (kubische Reste und Diophantische Gleichung)

Manchmal ist es nützlich, eine Diophantische Gleichung modulo einer geeigneten natürlichen Zahl n zu betrachten, um festzustellen, ob sie ganzzahlige Lösungen besitzen kann. Dies zeigt folgendes Beispiel:

(a) Bestimmen Sie alle möglichen kubischen Reste modulo 7 und 9.

(b) Zeigen Sie, dass die Diophantische Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2012$$

keine ganzzahligen Lösungen besitzt.

Aufgabe 16. (IMO 1970, Aufgabe 4)

(a) Finden Sie alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$, so daß Sie die Menge

$$M = \{n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6\}$$

in zwei disjunkte Mengen $A \cup B = M$ zerlegen können, so daß beide das gleiche Produkt ihrer Elemente haben:

$$\prod_{a \in A} a = \prod_{b \in B} b.$$

(b) Verallgemeinern Sie die Aufgabe.

Tipp: Satz von Wilson.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **16. Mai 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/65113368/17_SS_Elementare-Zahlentheorie`
