

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2017

Übungsblatt 5

22. Mai 2017

Aufgabe 22. (Zahlentheoretische Funktionen)

(a) Zeigen Sie, daß für jede multiplikative Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p)).$$

(b) Es sei n eine natürliche Zahl. Folgern Sie: $\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Aufgabe 23. (Zahlentheoretische Funktionen)

Es sei $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ die Teileranzahlfunktion $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$. Zeigen Sie:

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(d)\right)^2.$$

Tipp: Schreiben Sie dies als Gleichung arithmetischer Funktionen. Zeigen Sie dann, daß beide Seiten multiplikativ sind. Berechnen Sie zum Schluß die Werte bei Primzahlpotenzen.

Aufgabe 24. (Fermat-Gleichungen)

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ eine Lösung der Fermat-Gleichung

$$x^n + y^n = z^n.$$

Zeigen Sie: Ist $q := 2n + 1$ eine Primzahl, so ist $q \mid xyz$.

Bemerkung: Es ist natürlich bekannt, daß es nur die trivialen Lösungen der Fermat-Gleichung gibt. Es geht um ein elementares Argument für die Behauptung.

Aufgabe 25. (Anwendung des Chinesischen Restsatzes)

Der Kleinstaat Sikinien mit 23210 Einwohnern hat eine eigene Armee. Bei Paraden wird in 10er-Reihen marschiert, dann ist vorne das 5-köpfige Musikkorps. Beim jährlichen Manöver gehen alle in 9er-Reihen, und es bleiben genau 3 Mann zum Ziehen der einzigen Kanone von Sikinien übrig. Als einmal hoher Staatsbesuch kam, stellte man sich in 13er-Reihen vor dem Bahnhof auf, wobei der General und der Trompeter an der Spitze waren.

Bekanntlich beträgt die Größe der Armee mindestens 1000. In der Verfassung des Landes steht jedoch, dass höchstens 10% der Einwohner von Sikinien in der Armee sein dürfen. Wie viele Soldaten hat Sikinien?

Aufgabe 26. (Eulersche Version des kleinen Fermat)

Bestimmen Sie von Hand die letzten zwei Ziffern in der Dezimaldarstellung von $7^{(7^{(7^7)})}$.

Abgabe: Am kommenden Montag, den **29. Mai 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter