Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2017

Übungsblatt 1 8. Juni 2017

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie: G ist genau dann abelsch, wenn die Inversenabbildung $\mathrm{inv} : G \to G$, $g \mapsto \mathrm{inv}(g) := g^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Auf der Menge der Polynome $\mathbb{R}[X]$ sei die Verknüpfung $\circ$ durch $(f \circ g)(X) = f(g(X))$ definiert.

(a) Handelt es sich bei $(\mathbb{R}[X], \circ)$ um eine Gruppe?

(b) Sei $A = \{aX + b : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ die Teilmenge der Polynome vom Grad 1. Zeigen Sie: A ist abgeschlossen unter $\circ$ und $(A, \circ)$ ist eine Gruppe.

(c) Ist $(A, \circ)$ abelsch?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Bei welchen der folgenden Abbildungen zwischen Gruppen handelt es um Gruppenhomomorphismen?

(a) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) = 2x$

(b) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $f(x) = x^2$

(c) $f : (\mathbb{R}^\times, \cdot) \to (\mathbb{R}^\times, \cdot)$, $f(x) = x^2$

(d) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^\times, \cdot)$, $f(x) = 2^x$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit genau drei Elementen: $G = \{1, a, b\}$, wobei 1 das neutrale Element sei. Zeigen Sie:

(a) a und b sind zueinander invers.

(b) $a^2 = b$.

(c) Die Abbildung $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to G$, definiert durch

$$0 \mapsto 1, \quad 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto b,$$

ist ein Isomorphismus.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **15. Juni 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/65116210/17_SS_GdA`