Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Grundlagen der Algebra

Sommersemester 2017

Übungsblatt 3 21. Juni 2017

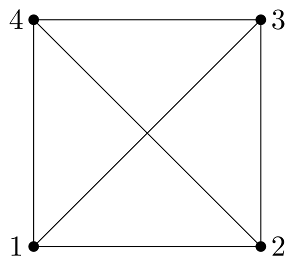
Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $f : X \to Y$ eine G-äquivariante Abbildung zwischen G-Mengen, d.h. für alle $x \in X$ und $g \in G$ gilt $f(g.x) = g.f(x)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $X \neq \emptyset$ und Y eine transitive G-Menge, so ist f surjektiv.
(b) Operiert G frei auf Y, so auch auf X.
(c) Ist f injektiv und operiert G treu auf X, so auch auf Y.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Wir bezeichnen im Quadrat mit den Ecken $1, 2, 3, 4$ kurz mit ij für $1 \leq i < j \leq 4$ die Kante oder Diagonale zwischen den Ecken i und j.



Betrachten Sie die Operation der Diedergruppe D_4 auf der Menge

$$X = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$$

aller Kanten und Diagonalen im Quadrat. Bestimmen Sie die Bahnen und die Stabilisatoren für ein Vertretersystem der Bahnen.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Sei X eine Menge und $f : X \to X$ eine selbstinverse bijektive Abbildung, d. h. $f^{-1} = f$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift $(-1).x := f(x)$ eine Operation von $\{\pm 1\}$ auf X gegeben ist.
(b) Ein Element $x \in X$ heißt *Fixpunkt* von f, wenn $f(x) = x$ gilt. Zeigen Sie mit Hilfe der Bahnenformel, dass die Anzahl der Fixpunkte ungerade ist, wenn X endlich von ungerader Kardinalität ist.
(c) Zeigen Sie: Ist G eine endliche Gruppe von gerader Ordnung, dann enthält G ein Element der Ordnung 2.
Hinweis: Betrachten Sie auf $G \setminus \{e\}$ die Abbildung $f(g) = g^{-1}$.

—— **bitte wenden** ——

Aufgabe 12. (4 Punkte)

(a) Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe mit p^n Elementen, $n \geq 1$. Zeigen Sie: G enthält ein Element der Ordnung p.

(b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Aussage nicht für beliebige natürliche Zahlen p gilt.

Abgabe: Am kommenden Mittwoch, den **28. Juni 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/65116210/17_SS_GdA`
