Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2017

Übungsblatt 10 26. Juni 2017

Aufgabe 44. (Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$)

Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] := \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein euklidischer Ring ist, und zwar bezüglich der Normabbildung

$$N : \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \to \mathbb{N}_0,\ N(a + b\sqrt{-2}) := a^2 + 2b^2 \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}$$

als euklidische Normfunktion.

(b) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ einen größten gemeinsamten Teiler d von $x := 5 - 2\sqrt{-2}$ und $y := 1 + 4\sqrt{-2}$.

(c) Vergleichen Sie $N(d)$ mit $\mathrm{ggT}(N(x), N(y))$ in Teilaufgabe (b). Warum stimmen sie nicht überein, obwohl die Normabbildung N multiplikativ ist?

Aufgabe 45. (Diophantische Gleichung)

Finden Sie die ganzzahligen Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$x^2 + 2 = y^3.$$

Hinweis: Aus Aufgabe 44 folgt, daß der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ euklidisch und somit faktoriell ist.

Aufgabe 46. (Gitter im quadratischen Zahlkörper)

Sei $d \in \mathbb{Z}$ kein Quadrat und $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper. Für $y \in K \setminus \mathbb{Q}$ definieren wir das Gitter

$$M_y := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}y = \{a + by \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq K,$$

und die Menge

$$R_y = \{x \in K \mid xM_y \subseteq M_y\}.$$

Zeigen Sie, daß R_y ein Unterring in $\mathfrak{o}_K$ (dem Ganzzahlring von K) ist.

Aufgabe 47. (Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$)

Wir betrachten den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, daß $\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß $z = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ genau dann Einheit ist, wenn $a^2 - 2b^2 = 1$ oder -1 gilt.

(c) Zeigen Sie, daß alle Einheiten des Rings $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ von der Form $\pm\varepsilon^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ sind.
Hinweis: Ist $z = a + b\sqrt{2}$ eine Einheit, dann zeigen Sie, daß bezüglich der Koordinaten (a, b) in $\mathbb{Z}^2$ die Elemente εz oder $\varepsilon^{-1}z$ eine kleinere Maximumsnorm als z haben. Wie hilft die Auswahl eines geeigneten Elements unter $z, -z, \tilde{z} = a - b\sqrt{2}, -\tilde{z}$ bei der Fallunterscheidung?

Abgabe: Am kommenden Montag, den **3. Juli 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/65113368/17_SS_Elementare-Zahlentheorie`