

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2017

Übungsblatt 11

3. Juli 2017

Aufgabe 48. (Diskriminante einer Ordnung)

Sei K ein quadratischer Zahlkörper und $\mathfrak{o} \subseteq K$ eine Ordnung. Sie dürfen davon ausgehen, daß es $\alpha, \beta \in K$ gibt mit $\mathfrak{o} = \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{Z}}$ (auch wenn das aus der Definition folgt).

- Überlegen Sie sich, daß \mathfrak{o} eine wohldefinierte Diskriminante $\Delta_{\mathfrak{o}} \in \mathbb{Z}$ als Determinante der Spurform bezüglich \mathbb{Z} -Basen von \mathfrak{o} besitzt.
- Bestimmen sie für $d \equiv 1 \pmod{4}$ die Diskriminante der Ordnung $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ in $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
- Bestimmen Sie die Diskriminante \mathfrak{o} in Bezug auf den Index $(\mathfrak{o}_K : \mathfrak{o})$ und die Diskriminante Δ_K der Maximalordnung \mathfrak{o}_K .

Aufgabe 49. (Kettenbruchentwicklung rationaler Zahlen)

- Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\frac{90901}{68845}$. Vergleichen Sie diese mit dem euklidischen Algorithmus zur Berechnung des ggTs von 90901 und 68845.
- Stellen Sie $-\frac{6}{17}$ als Kettenbruch mit ganzen Zahlen dar.
- Bestimmen Sie den Wert von $[1, 2, 3, 4, 5]$.

Aufgabe 50. (Endliche Kettenbrüche)

Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge ganzer Zahlen mit $a_i \geq 1$ für $i > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir wie in der Vorlesung

$$M_n = \begin{pmatrix} p_n & r_n \\ q_n & s_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so daß $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ gilt. Zeigen Sie folgende Behauptungen für alle $n \in \mathbb{N}$:

- $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}$.
- $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.

Aufgabe 51. (Der Wert eines unendlichen Kettenbruchs)

Bestimmen Sie den Wert des unendlichen Kettenbruchs $[2, 1, 4, 2, 1, 4, \dots]$.

Abgabe: Am kommenden Montag, den **10. Juli 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/65113368/17_SS_Elementare-Zahlentheorie