Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix

Elementare Zahlentheorie

Sommersemester 2017

Übungsblatt 12 10. Juli 2017

Aufgabe 52.

(a) Stellen Sie $\sqrt{7}$ als Kettenbruch mit ganzen Zahlen dar.

(b) Bestimmen Sie den Wert von $[5, 5, 5, \cdots]$.

Aufgabe 53.

Zeigen Sie, daß eine Primzahl p genau dann von der Form

$$p = x^2 + 3y^2$$

ist mit $x, y \in \mathbb{Z}$, wenn $p = 3$ oder $p \equiv 1 \pmod 3$.

Aufgabe 54.

Zeigen Sie, daß eine Primzahl p genau dann von der Form

$$p = x^2 + 7y^2$$

ist mit $x, y \in \mathbb{Z}$, wenn $p = 7$ oder $p \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$.

Aufgabe 55. (Kettenbruchentwicklung von Quadratwurzeln)

Es sei $m \geq 2$ ein natürliche Zahl.

(a) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{m^2 - 1}$. Achten Sie dabei auf die Periodizität des Kettenbruchs.

(b) Berechnen Sie für $m = 2$ die ersten vier Näherungsbrüche von $\sqrt{3}$.

Aufgabe 56.

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit Kettenbruchentwicklung $x = [a_0, a_1, \cdots]$. Sei $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Näherungsbrüche von x. Zeigen Sie, daß die Ungleichung

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| > \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 57.

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit Kettenbruchentwicklung $x = [\overline{a_0, a_1, \cdots, a_n}]$ (der rein periodische Kettenbruch mit Periode $a_0, \cdots, a_n$) und $a_0 \neq 0$. Weiter sei $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Näherungsbrüche von x.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0] \quad \text{und} \quad \frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1].$$

(b) Zeigen Sie, dass x eine Wurzel des Polynoms $q_n X^2 - (p_n - q_{n-1})X - p_{n-1}$ ist.

(c) Sei $y := [\overline{a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0}]$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $-\frac{1}{y}$ die andere Wurzel des Polynoms $q_n X^2 - (p_n - q_{n-1})X - p_{n-1}$ ist.

Aufgabe 58.

Seien $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ mit $1 < b_1 < b_0$. In dieser Aufgabe berechnen wir die Kettenbruchentwicklung von $\log_{b_0}(b_1)$.

(a) Zeigen Sie, dass eine ganze Zahl n_1 existiert, so dass folgende Ungleichung gilt:

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}.$$

(b) Zeigen Sie, dass b_i und n_i für alle $i \in \mathbb{N}$ existieren, so dass folgende Ungleichung gilt:

$$b_{i+1}^{n_{i+1}} < b_i < b_{i+1}^{n_{i+1}+1}.$$

Hinweis: Die Zahl b_{i+1} ist durch $b_{i+1} = \frac{b_{i-1}}{b_i^{n_i}}$ definiert.

(c) Folgern Sie, dass die Kettenbruchentwicklung von $\log_{b_0}(b_1)$ durch $[0, n_1, n_2, \cdots]$ gegeben ist.

(d) Berechnen Sie n_1 und n_2 für $b_0 = 10$ und $b_1 = 2$.

Aufgabe 59. (Die Schlacht von Hastings (14.10.1066))

> Harolds Mannen standen nach alter Gewohnheit dichtgedrängt in 13 gleichgroßen Quadraten aufgestellt, und wehe dem Normannen, der es wagte, in eine solche Phalanx einbrechen zu wollen... Als aber Harold selbst auf dem Schlachtfeld erschien, formten die Sachsen ein einziges gewaltiges Quadrat mit ihrem König an der Spitze und stürmten mit den Schlachtrufen „Ut!“, „Olicrosse!!“, „Godemite!“ vorwärts. ... (aus *„Carmen de Hastingae Proelio“* von Gui, Bischof von Amiens).

Bestimmen Sie die Mindestgröße der Armee von König Harold II.

Aufgabe 60.

Sei $d \in \mathbb{N}$ kein Quadrat. Zeigen Sie, dass die Kettenbruchentwicklung von $x = \frac{1}{2} + \sqrt{d}$ die Form

$$[b_0, \overline{b_1, b_2, ..., b_2, b_1, 2b_0 - 1}]$$

hat.

Abgabe: Am kommenden Montag, den **17. Juli 2017**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`http://www.uni-frankfurt.de/65113368/17_SS_Elementare-Zahlentheorie`
