

Übung 5

Abgabe bis Donnerstag, 18.01.

Aufgabe 6: [Varianten der Binomialmethode]

- a) Benutzen sie die Gleichung $p = 1/2$ (anstatt $ud = 1$) um

$$\begin{aligned}
 u &= e^{r\Delta t} \left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} \right) \\
 d &= e^{r\Delta t} \left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} \right)
 \end{aligned}$$

zu zeigen.

- b) Preisentwicklung in der Binomialmethode:

Zeigen sie für $\beta := \frac{1}{2} \left(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t} \right)$ und $u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$:

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{(\Delta t)^3}\right).$$

- c) Zeigen sie für die folgende Wahl für das CRR-Modell

$$u := e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d := e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad \tilde{p} := \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right),$$

dass \tilde{p} eine Approximation erster Ordnung von p ist.

Aufgabe 7: [Trinomialmodell]

Erweitern sie das klassische Binomialmodell wie folgt zu einem Trinomialmodell: Erlauben sie drei Preise S_{i+1} für das Wertpapier zum Zeitpunkt t_{i+1} mit,

$$\begin{aligned}
 uS_i &\text{ mit Wahrscheinlichkeit } p_1 \\
 mS_i &\text{ mit Wahrscheinlichkeit } p_2 \\
 dS_i &\text{ mit Wahrscheinlichkeit } p_3.
 \end{aligned}$$

Für die Parameter u, m, d, p_1, p_2, p_3 werden sechs Gleichungen benötigt. Offensichtlich sollen die Wahrscheinlichkeiten nichtnegativ sein und es soll $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ gelten.

- a) Geben sie die beiden Gleichungen an, welche Erwartungswert und Varianz dem kontinuierlichen Modell gleichsetzen.
- b) Der Baum soll rekominierend sein. Geben sie diese Voraussetzung in einer Gleichung an.
- c) Ermitteln sie die Parameter für diesen Fall, bei dem die Wahrscheinlichkeiten gleich sind.
Hinweis: Für

$$\alpha := e^{r\Delta t}, \quad \beta := e^{\sigma^2 \Delta t}$$

zeige:

$$m = \frac{\alpha}{2}(3 - \beta), \quad u = \rho + \sqrt{\rho^2 - m^2}, \quad \text{für } \rho := \frac{\alpha}{4}(\beta + 3)$$

- d) Wie kann bei der Berechnung von u Auslöschung vermieden werden?