Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Martin Lüdtke

Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

Übungsblatt 1 10. April 2018

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdots 4^n = 2^{n(n+1)}$

(b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - (2n)^2 = -n(2n+1)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k} = (-1)^n$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Polynome $q(X)$ und $r(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ mit $\operatorname{grad} r(X) < 2$, so dass

$$X^4 + 4X^3 - 14X^2 + X + 11 = (X^2 - 3X + 2)q(x) + r(X).$$

(b) Sei $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ das Polynom $f(X) = X^3 - 8X^2 + 5X + 50$. Es gilt $f(-2) = 0$. Schreiben Sie $f(X)$ als Produkt von Polynomen vom Grad 1.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Primzahlen p mit $p \equiv 4 \bmod 6$.

(b) Ist die 100-stellige Zahl $200\ldots018$ eine Quadratzahl?

(c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $4^n - 1$ eine Primzahl?
(Hinweis: Geometrische Summenformel)

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen unendlich ($\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$), wenn für alle $S \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > S$ für alle $n \geq N$ gilt.

Zeigen Sie: Sind alle $a_n > 0$, so konvergiert (a_n) genau dann gegen unendlich, wenn die Folge $(1/a_n)$ eine Nullfolge ist. Zeigen Sie, dass die Aussage falsch ist, wenn man die Bedingung $a_n > 0$ durch $a_n \neq 0$ ersetzt.

—— **bitte wenden** ——

Bonusaufgabe.

(1) Wenn Anna neben Eva sitzt, ist Eva glücklich.

(2) Wenn Ben glücklich ist, ist Eva unglücklich.

Anna sitzt neben Eva. Ist Ben glücklich?

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den **17. April 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

`https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II`
