

Grundlagen der Algebra
Übungsblatt 1

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

09.04.2018

Übung 1 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen mit den vorgeschriebenen Operationen Gruppen sind (Beweis oder Gegenbeispiel):

1. (\mathbb{C}, \times)
2. $(\mathbb{R}_{\geq 0}, +)$
3. $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \times)$
4. $(\mathbb{R}_{> 0}, +)$
5. $(\mathbb{R}_{> 0}, \times)$
6. Sei $X \neq \emptyset$, $(\text{Abb}(X, X), \circ)$
7. Seien X, Y nichtleere Mengen, $(\text{Abb}(X, Y), \circ)$
8. n -te Einheitswurzeln mit Addition
9. n -te Einheitswurzeln mit Multiplikation
10. $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}: z^n = 1\}$ mit Multiplikation
11. $\{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid A \neq 0\}$ mit Matrixaddition
12. $\{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid A \neq 0\}$ mit Matrixmultiplikation
13. $\{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid \det A \neq 0\}$ mit Matrixmultiplikation
14. $\{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid \det A \neq 0\}$ mit Matrixaddition
15. $\{A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid \det A = 1\}$ mit Matrixmultiplikation
16. $\{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid A^T A = \text{Id}_n\}$ mit Matrixmultiplikation
17. $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = \text{Id}_n\}$ mit Matrixmultiplikation.

Übung 2 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit $g, h \in G$ und sei $n \in \mathbb{Z}$. Finden Sie ein Beispiel dafür, dass im Allgemeinen $(gh)^n \neq g^n h^n$. Zeigen Sie: wenn für g, h gilt $(gh)^{-1} = g^{-1} h^{-1}$, so kommutieren g, h und $(gh)^n = g^n h^n$ gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Übung 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: eine Gruppe, in der jedes nichttriviale Element die Ordnung 2 hat, ist abelsch.

Übung 4 (1+3 Punkte)

Sei G eine abelsche Gruppe und $U := \{g \in G \mid \text{ord}(g) \leq 2\}$.

1. Zeigen Sie, dass U eine Untergruppe von G ist.
2. Sei nun zusätzlich die Anzahl der Elemente von G endlich. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{g \in G} g = \prod_{g \in U} g.$$

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr am Montag, den 16.04.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutor*innen im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.