

## Elementarmathematik II

Sommersemester 2018

### Übungsblatt 2

17. April 2018

#### Aufgabe 5. (8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden vier Folgen von reellen Zahlen:

(a)  $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

(b)  $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(c)  $c_n = 12n - n^2$

(d)  $d_n = 1 + (-1)^n$

Geben Sie jeweils die ersten fünf Folgenglieder an und untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Sie brauchen Ihre Antworten nicht beweisen. Geben Sie aber im Falle von Beschränktheit eine Schranke an und im Falle von Konvergenz den Grenzwert.

Zur Erinnerung: Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *monoton steigend* (bzw. *monoton fallend*), wenn  $a_n \leq a_{n+1}$  (bzw.  $a_n \geq a_{n+1}$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

#### Aufgabe 6. (3 Punkte)

Erinnern Sie sich an die Definition einer Cauchy-Folge. Durch logische Negation ergibt sich: Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist *keine* Cauchy-Folge, falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass für alle  $N \in \mathbb{N}$  Zahlen  $n, m \geq N$  existieren mit  $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$ . Bilden Sie die Negation der folgenden Aussagen:

(a)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton steigend.

(b)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nach oben beschränkt.

(c)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe 7. (3 Punkte)

(a) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie: Es gilt  $a < b + \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$  genau dann, wenn  $a \leq b$ .

(b) Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen reeller Zahlen mit  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

(c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Aussage aus (b) falsch ist, wenn man alle  $\leq$  durch  $<$  ersetzt.

#### Aufgabe 8. (3 Punkte)

Zeigen Sie: Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit Grenzwert  $a$ , dann konvergiert auch jede Teilfolge gegen  $a$ .

### **Bonusaufgabe.**

Drei Zwerge mit den Namen Herr Rot, Herr Grün und Herr Blau treffen sich im Garten. Da bemerkt der eine: „Das ist ja lustig. Wir haben einen roten, einen grünen und einen blauen Hut auf.“ „So ein Zufall – aber keiner von uns trägt einen Hut mit der Farbe seines Namens“, meint der Zwerg mit dem blauen Hut. „Stimmt genau“, entgegnet Herr Grün.

Welche Farbe hat der Hut von Herrn Blau?

---

**Abgabe:** Am kommenden Dienstag, den **24. April 2018**, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

[https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18\\_SS\\_Elementarmathematik\\_II](https://www.uni-frankfurt.de/70100088/18_SS_Elementarmathematik_II)

---