Algebraische Zahlentheorie
Blatt 1 — 17.04.2018

Aufgabe 1.

Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ die Menge $\{a + b\sqrt{-11} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.

(b) Die Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ sind $\{\pm 1\}$.

(c) Faktorisieren Sie 15 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ auf zwei verschiedene Arten in ein Produkt aus zwei Faktoren, die beide keine Einheiten sind.

(d) In $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ sind 3 und 5 irreduzibel aber nicht prim, insbesondere ist $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ kein faktorieller Ring.

Tipp: Betrachten Sie die Abbildung $N(a + b\sqrt{-11}) = a^2 + 11b^2$ für $a, b \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.

Ist $\frac{25-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$ eine (über $\mathbb{Z}$) ganze algebraische Zahl ?

Aufgabe 3.

Sei $A \subset B$ eine Ringerweiterung, $u \in B^\times$ und $x \in A[u] \cap A[u^{-1}]$. Zeigen Sie, daß x ganz über A ist.

Tipp: Nehmen Sie an, daß $B = A[u, u^{-1}]$ als A-Algebra. Finden Sie dann einen endlich erzeugten A-Modul M mit $xM \subseteq M$ und $1 \in M$.

Aufgabe 4.

Es sei k ein Körper. Zeigen Sie, daß die folgenden Ringe Integritätsringe aber nicht normal sind. Bestimmen Sie auch den jeweiligen ganzen Abschluss im Quotientenkörper.

(a) $k[X, Y]/(Y^2 - X^3)$,

(b) $k[X, Y]/(Y^2 - X^3 - X^2)$.

Aufgabe 5.

Zeigen Sie, daß der Ring $R = \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 + 1)$ nicht Euklidisch wohl aber ein Hauptidealring ist. Anleitung:

(a) Als $\mathbb{R}[X]$-Modul ist R frei vom Rang 2, isomorph zu $R[X] \oplus \mathbb{R}[X]Y$.

(b) Betrachten Sie zu $f \in R$ die Matrix $\Lambda_f \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}[X])$ der Linksmultiplikation mit f.

(c) Ist f eine Einheit, dann ist $\det(\Lambda_f)$ eine Einheit in $\mathbb{R}[X]$. Bestimmen Sie die Einheiten von R.

(d) Angenommen R ist Euklidisch bezüglich der Gradfunktion δ. Wählen Sie $f \in R$ mit $\delta(f) > 0$ minimal. Zeigen Sie: es gibt einen Isomorphismus $\varphi : R/(f) \to \mathbb{R}$, wobei $\varphi|_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, da jedes Element in R modulo (f) kongruent zu einer Einheit von R ist.

(e) Es gibt keinen $\mathbb{R}$-linearen Homomorphismus $R \to \mathbb{R}$. Widerspruch.

(f) Finden Sie eine Inklusion $R \subset \mathbb{C}[U, U^{-1}]$, so daß $U = X + iY$ ist, insbesondere ist R ein Integritätsring.

(g) Auf $\mathbb{C}[U, U^{-1}]$ setzen wir die komplexe Konjugation von $\mathbb{C}$ durch $\tau : U \mapsto -U^{-1}$ fort. Der Ring R ist der Fixring unter τ.

(h) Sei nun $I \lhd R$ ein Ideal. Sein Bild in $\mathbb{C}[U, U^{-1}]$ erzeugt ein τ-invariantes Hauptideal. Dieses kann von einem τ-invarianten Element erzeugt werden, das dann auch I erzeugt.

Abgabe: Am kommenden Dienstag, den 24.04.2018, bis zur Vorlesung in den Kasten im 3. Stock, Institut für Mathemtik, Robert–Mayer Strasse 6-8. Downloads von Übungsblättern und Informationen zur Vorlesung unter

http://www.uni-frankfurt.de/70100869/18_SS_Algebraische_Zahlentheorie

---

18. April 2018